Chapter # 3 :- Probability Distributions For more than one Random Variable.

Example Let x and y be two R.V with the following joint PMF :-

$$P(X = x, Y = y) = \begin{cases} 1/16 & , x = -1, y = -1 \\ 2/16 & x = -1, y = 0 \\ 2/16 & x = 0, y = -1 \\ 3/16 & x = 0, y = 1 \\ 2/16 & x = 1, y = 0 \\ 6/16 & x = 1 \quad y = 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

x \ y	-1	0	1
-1	1/16	2/16	
0	2/16		3/16
1		2/16	6/16

$\boxed{a}$ $P(X=0, y=-1) = 2/16 = 1/8$

$\boxed{b}$ $P(X=0, y \leq 0) = 2/16 + 0 = 2/16 = 1/8$

$\boxed{c}$ $P(X \leq 0, Y \leq 0) = 1/16 + 2/16 + 2/16 = 5/16$

$\boxed{d}$ $F_{(X,Y)}(0,0) = P(X \leq 0, y \leq 0) = \frac{5}{16}$

$\rightarrow$ CDF

(e) $F_{X,Y}(-1,0) = P(X \le -1\ ,\ Y \le 0)$

$= P(X=-1, Y=-1) + P(X=-1, Y=0)$

$= \frac{3}{16}$

(f) $F_{X,Y}(-1,0) = P(X \le -1, Y \le 0) = 3/16$

(g) $F_{Y,X}(-1,0) = P(Y \le -1\ ,\ X \le 0) = \frac{3}{16}$ ← بالصدفة طلعت زي الفروع اللي قبل

$\therefore F_{Y,X}(-1,0) = F_{X,Y}(0,-1)$

بدلنا ترتيبهم

∴ الترتيب مهم جداً جداً جداً

(h) $F_{X,Y}(-\infty,-\infty) = P(X \le -\infty\ ,\ Y \le -\infty) = 0$

(i) $F_{X,Y}(\infty,\infty) = P(X \le \infty\ ,\ Y \le \infty) = 1$ ← لأنهم صاروا الـ 2R.V كأنهم وحدة واحدة

(j) $F_{X,Y}(\infty,-\infty) = P(X \le \infty\ ,\ Y \le -\infty) = 0$

[illegible]

معناها بغض النظر عن قيمة y، ولكنه يوجد شرط على قيمة x.

(k) $P(X=-1) = ?\ = \sum_{y=-\infty}^{\infty} P(X=-1, Y=y) = 3/16$

(l) $P(X=0) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} P(X=0, Y=y) = \frac{5}{16}$

(m) $P(Y=0) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} P(X=x, Y=0) = \frac{4}{16}$

(n) Determine the marginal PMF of X?

$P(X=0) = \frac{5}{16}$

$P(X=-1) = 3/16$

$P(X=1) = 8/16$

$\Rightarrow P(X=x) = \begin{cases} 3/16 & , x=-1 \\ 5/16 & , x=0 \\ 8/16 & , x=1 \\ 0 & , o.w \end{cases}$

Scanned by TapScanner

(O) Determine the marginal PMF of Y ?

$P(Y=-1) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} P(X=x, y=-1) = 3/16$

$P(Y=0) = 4/16$

$P(Y=1) = 9/16$

(P) Are X and Y statistically Independent ?

Note:- X and Y are said to be statistically independent if $P(X=x, Y=y) = P(X=x)\,P(Y=y)$ for all values of x and y

$P(X=-1, Y=-1) \stackrel{?}{=} P(X=-1)\,P(Y=-1)$

$1/16 \neq \frac{3}{16} * \frac{3}{16} = \frac{9}{(16)^2}$

So X and Y are not S.Independent

لازم أفحص عند كل القيم اللي بالجدول ولازم يتساوى هاي المعادلة بالتالي بيطلع SI .

(Q) $P(\underbrace{X=0}_{A} / \underbrace{Y=-1}_{B}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(X=0, Y=-1)}{P(Y=-1)} = \frac{2/16}{3/16} = \boxed{\frac{2}{3}}$

(q) $P(X \geq 0 / Y \leq 0) = \frac{P(X \geq 0, Y \leq 0)}{P(Y \leq 0)} = \frac{4/16}{7/16} = 4/7$

(R) $P(\underbrace{X \geq 0}_{A} / \underbrace{y \leq 0, X \leq 0}_{B}) = \frac{P(X=0, y \leq 0)}{P(y \leq 0, X \leq 0)} = \frac{2/16}{5/16} = \frac{2}{5}$

Scanned by TapScanner

{ Continuous Case }

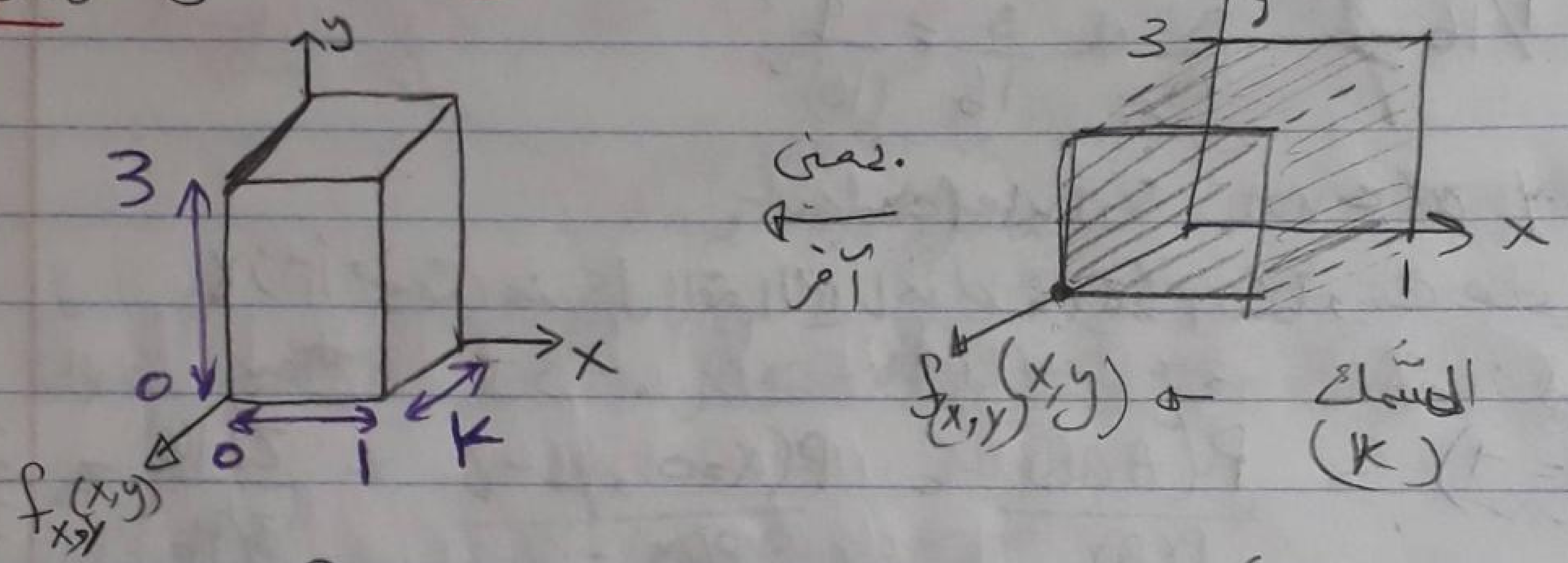
Example let X and Y be two RVs with the following joint pdf :-

$$f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} k , & 0 \le x \le 1 ,\ 0 \le y \le 3 \\ 0 , & o.w \end{cases}$$

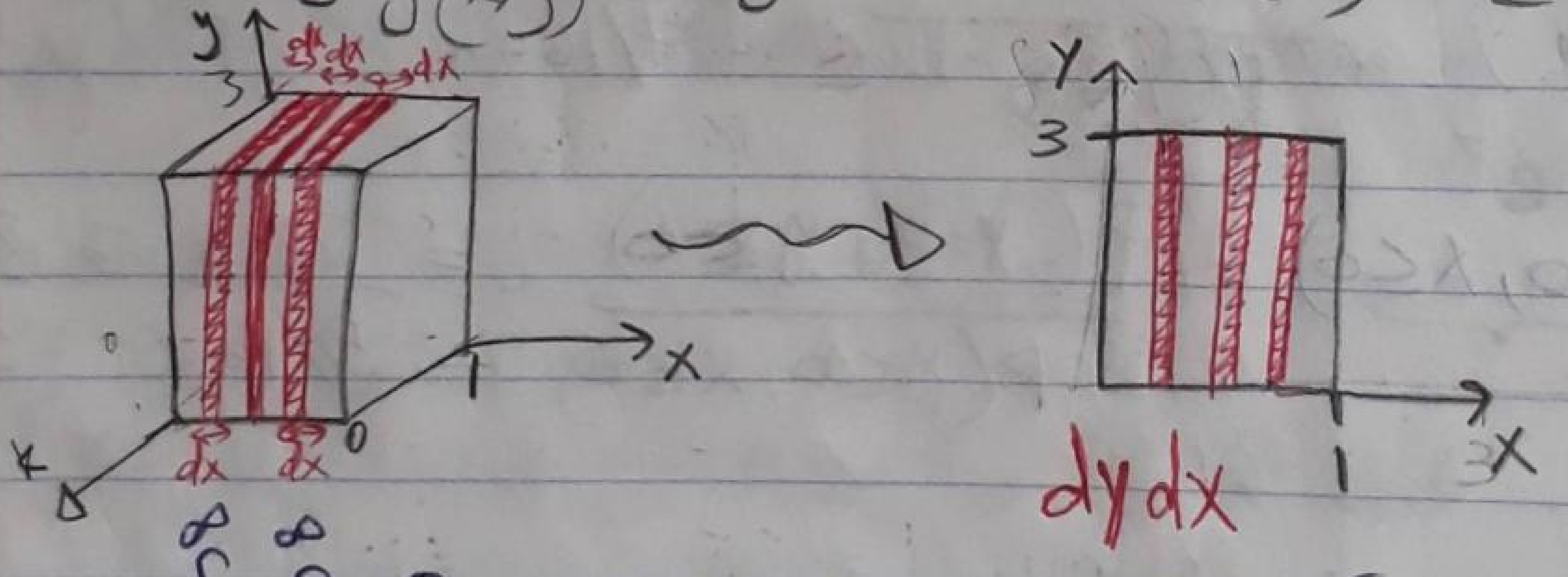
a Determine the value of the constant K.

بيكامل اللي جوا بالأول

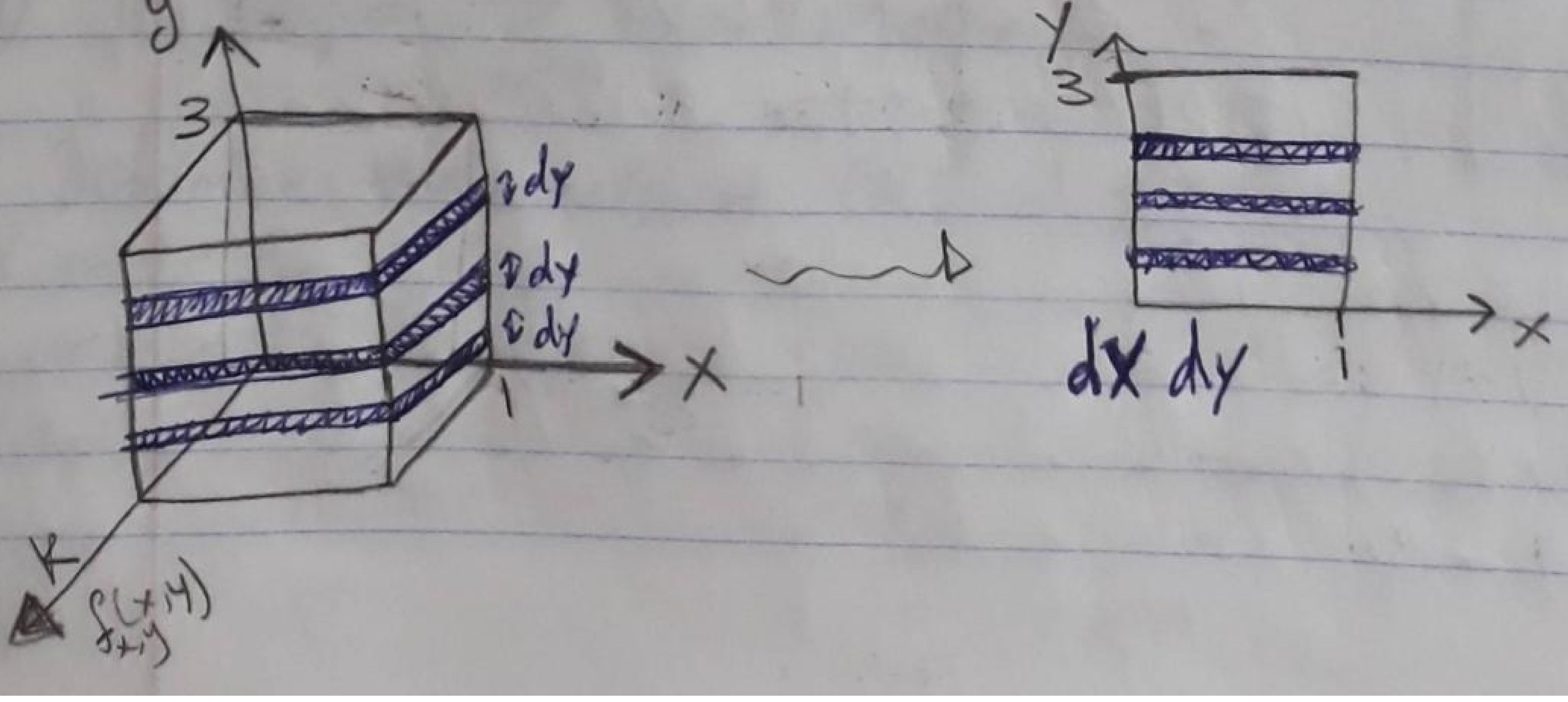
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\, dy \right] dx = 1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left[f_{x,y}(x,y)\, dx \right] dy$$



إزاي بجيب أحلها كده : $\iint f_{(x,y)}(x,y)\, dy\, dx$:-

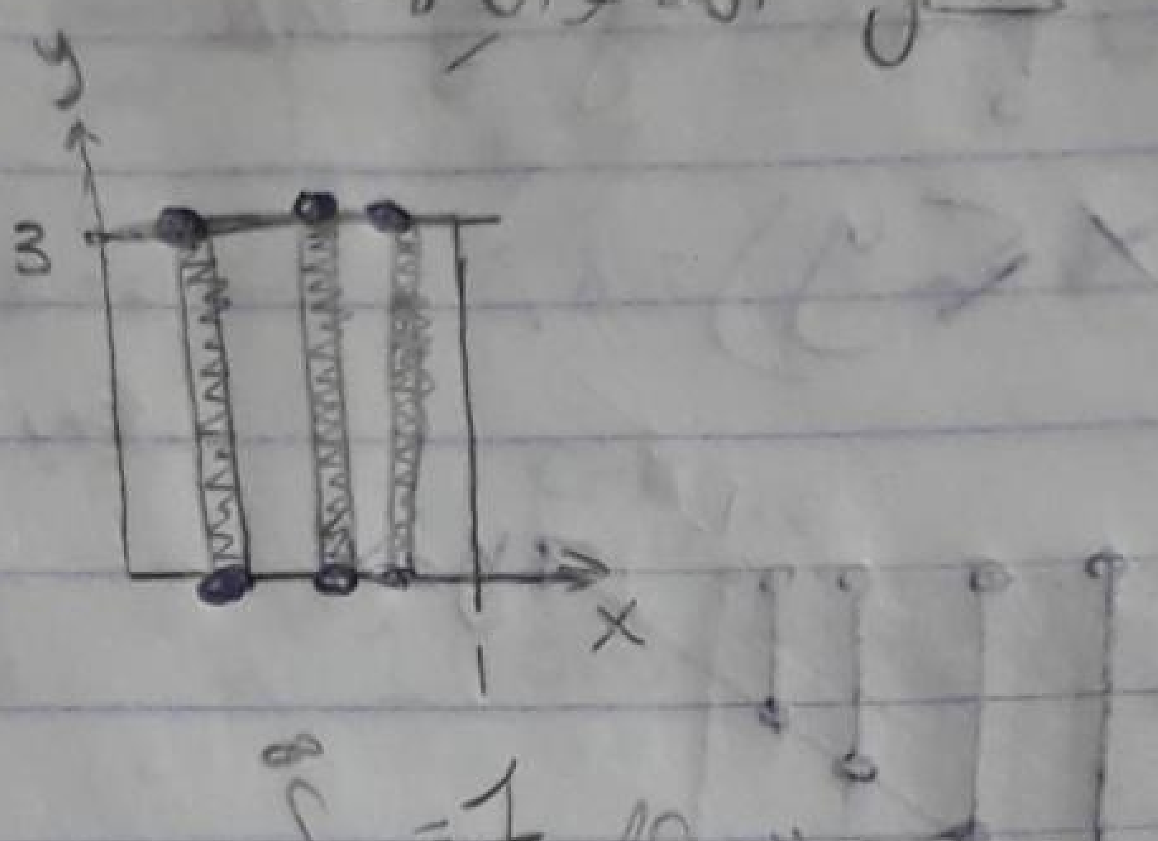


إزاي بجيب أحلها كده : $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(x,y)}(x,y)\, dx\, dy$



الطريقة الأولى

حل السؤال :-



(I) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(x,y)}(x,y)\, dy\, dx$

$= \int_0^1\int_0^3 k\, dy\, dx$

مر حابط صفحاتها نجمع الملايين بتحوس dx اللي جنب بعض مرة وحدة.

$= \int_0^1 \underbrace{ky\Big|_0^3}\, dx$

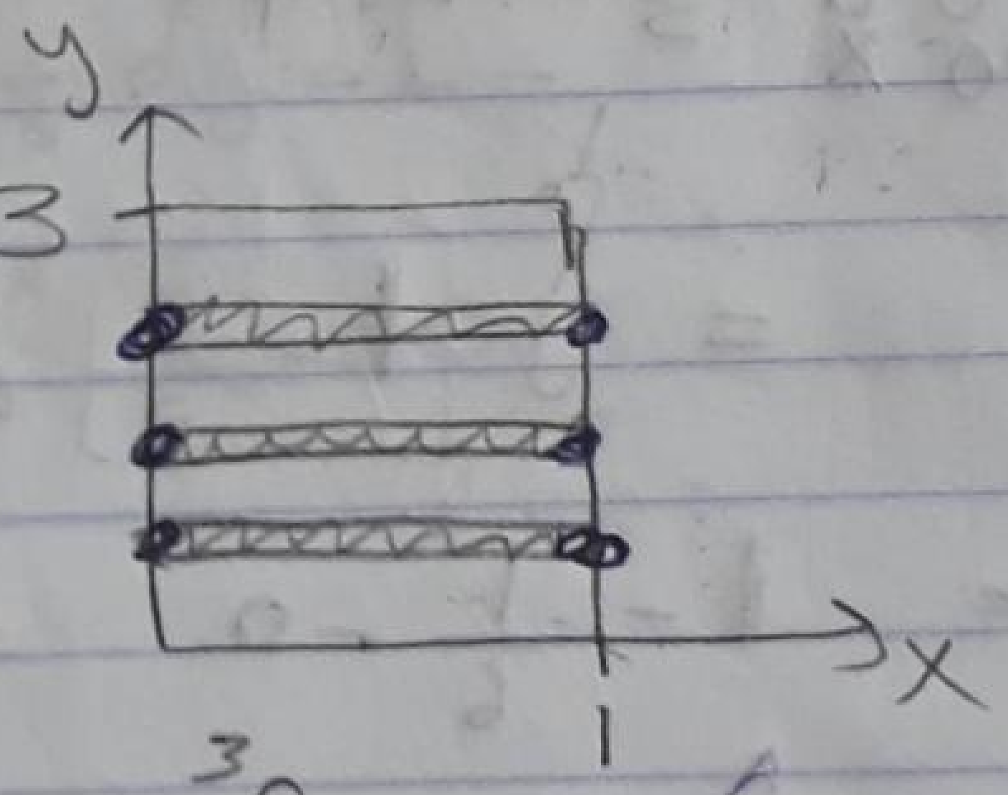
$= \int_0^1 \underbrace{k\,[3-0]}\, dx = 3kx\Big|_0^1 = 3k = \boxed{1}$

$\int_{-\infty}^{\infty} = 1$ صب هاي عشان كل ال pdf

$\Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{3}}$

صفر يطلع نتيجة الحل الداخلي (التكامل الداخلي) أي قيمة أو متغير بدلالة y مثلاً إذا كان dy، أو إذا كان dx صفر يطلع الناتج بدلالة dx، بيكون فيه الحل قاطع في الأغلب.

(II) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(x,y)}(x,y)\, dx\, dy = 1$



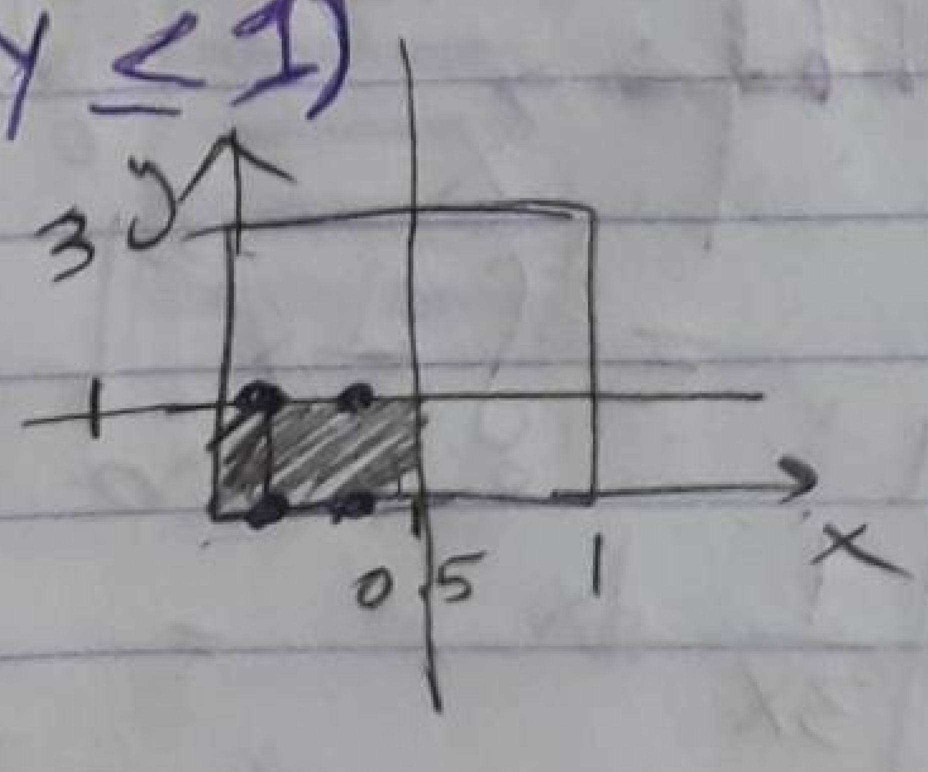
$\int_0^3\int_0^1 k\, dx\, dy = 1$

$= \int_0^3 kx\Big|_0^1\, dy = \int_0^3 k\,[1-0]\, dy = \int_0^3 k\, dy$

$= ky\Big|_0^3 = k\,[3-0] = 3k = 1 \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{3}}$

نفس حل الطريقة الأولى.

(b) $P(0 \le x \le 0.5\ ,\ 0 \le y \le 1)$



$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\, dy\, dx$

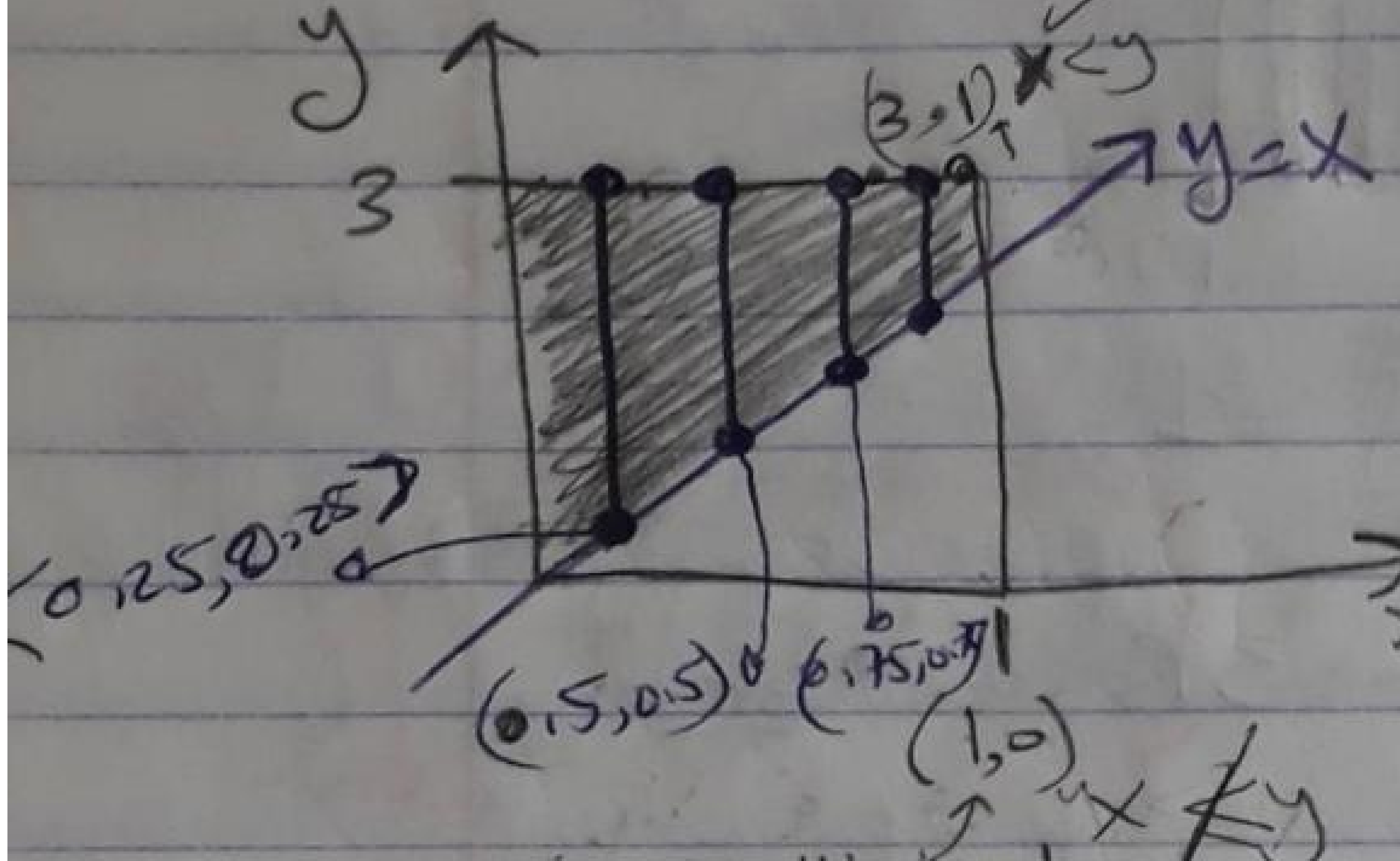
$= \int_0^{0.5}\int_0^1 \frac{1}{3}\, dy\, dx$

$\Rightarrow$

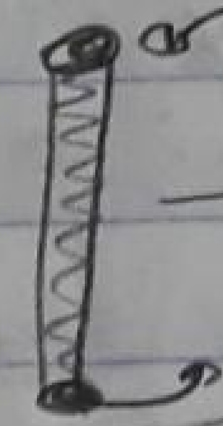
$$= \int_0^{0.5} \frac{1}{3} y \Big|_0^1 dx = \int_0^{0.5} \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} x \Big|_0^{0.5} = \frac{1}{3}[0.5 - 0] = \frac{1}{6}$$

c) $P(X \le Y) = ??$ $\longrightarrow$ $y = x$ أول اشي برسم

وبعدين بدور على الرسم أي نقاط بيكون عندها $x \le y$ ؟؟



إذاً نظلل المنطقة العليا



$\langle 0.75, 3 \rangle$

$\longrightarrow$ when $x = 0.75$

$\langle 0.75, 0.75 \rangle$ ← دائماً النقطة ... رح تكون عند $y = x$

يعني الحركة بتعتمد على y وليس x ، ال x ثابت

$$\therefore P(X \le Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_x^3 \frac{1}{3}\, dy\, dx = \int_0^1 \frac{1}{3} y \Big[_x^3 \, dx$$

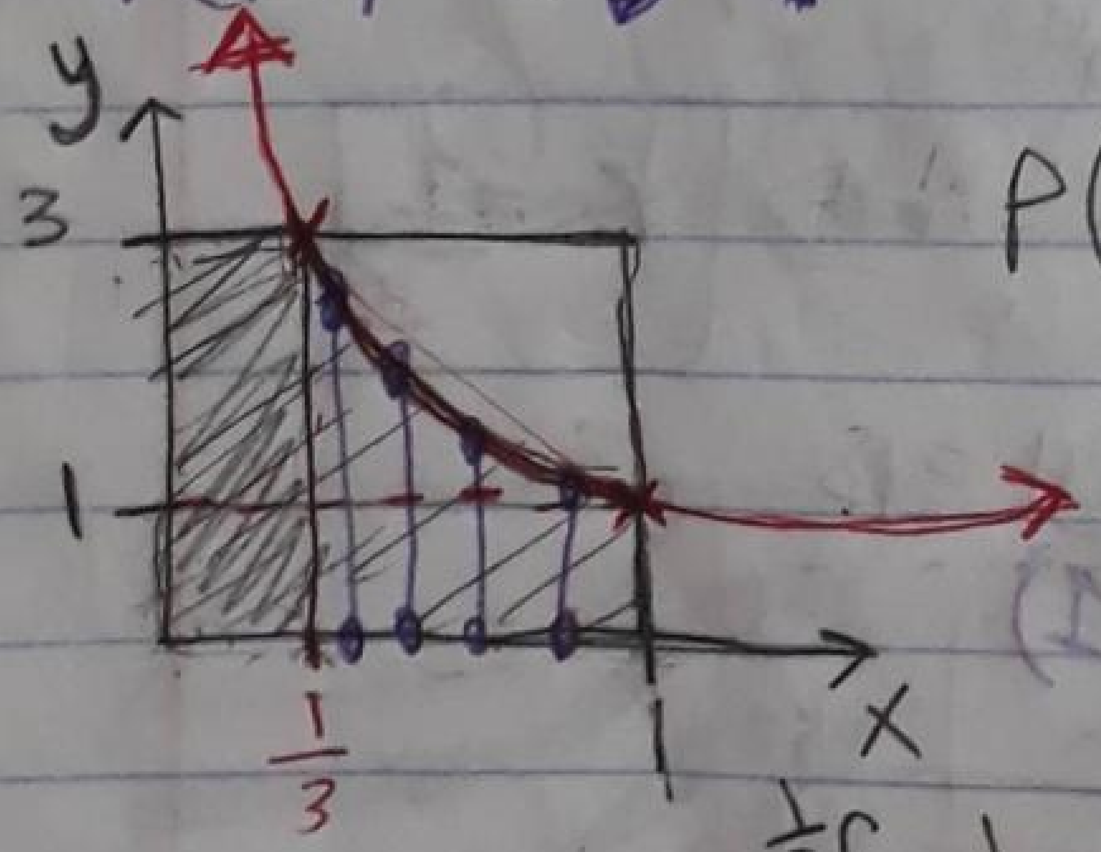
قيم x عكس ... ثابتين

بس قيم y هي اللي بتتغير

$$= \int_0^1 \left[1 - \frac{x}{3}\right] dx = x - \frac{x^2}{6} \Big|_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{6} - 0 = \frac{5}{6}$$

d) $P(XY \le 1) = ?$ $\quad xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$



$$P(XY \le 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \int_0^3 \frac{1}{3}\, dy\, dx + \int_{\frac{1}{3}}^{1} \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{3}\, dy\, dx$$

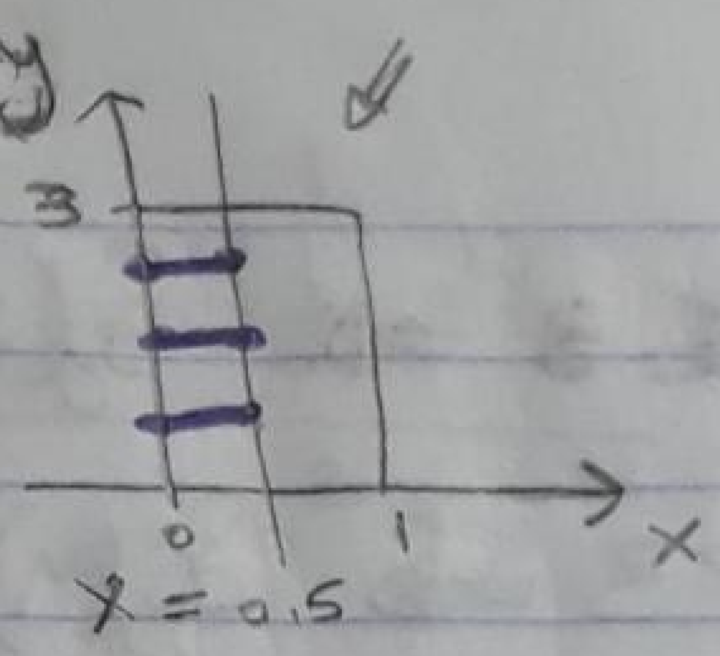
$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} y \Big|_0^3 dx + \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{3} y \Big|_0^{\frac{1}{x}} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} 1\, dx + \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{3x}\, dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln|x| \Big|_{\frac{1}{3}}^{1}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left[0 - \ln\left|\frac{1}{3}\right|\right] =$$

Scanned by TapScanner

حسب حاي الصيغة لازم يكون الحل بدلالة $dy\,dx$ ، بس النتيجة النهائية مارح تفرق طالما من الفترة الصحيحة .



(e) $P(X \le 0.5) = ??$

$$P(X \le 0.5) = \int_0^{0.5}\int_0^{3} \frac{1}{3}\, dy\,dx$$

$$= \int_0^{0.5} \frac{1}{3}[3-0]\, dx = \int_0^{0.5} 1\, dx = 1(0.5-0) = 0.5$$

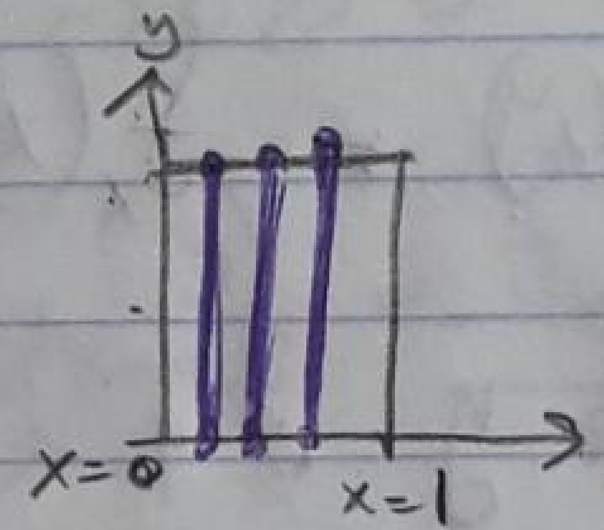
(f) Determine the marginal pdf of X ?

لما بدي أطلع الـ pdf لـ x ، بعمل تكامل بالنسبة إلى y .

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\, dy \leftarrow \text{Marginal pdf of } X.$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\, dy$$

الفترة لـ y



$\boxed{\text{Case \#1}}$ $\underbrace{x<0}_{\text{إكسات}} \rightarrow f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 0\, dy = 0$

$\boxed{\text{Case \#2}}$ $0<x<1 \rightarrow f_X(x) = \int_0^{3} \frac{1}{3}\, dy = 1$

$\boxed{\text{Case \#3}}$ $x>1 \rightarrow f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 0\, dy = 0$

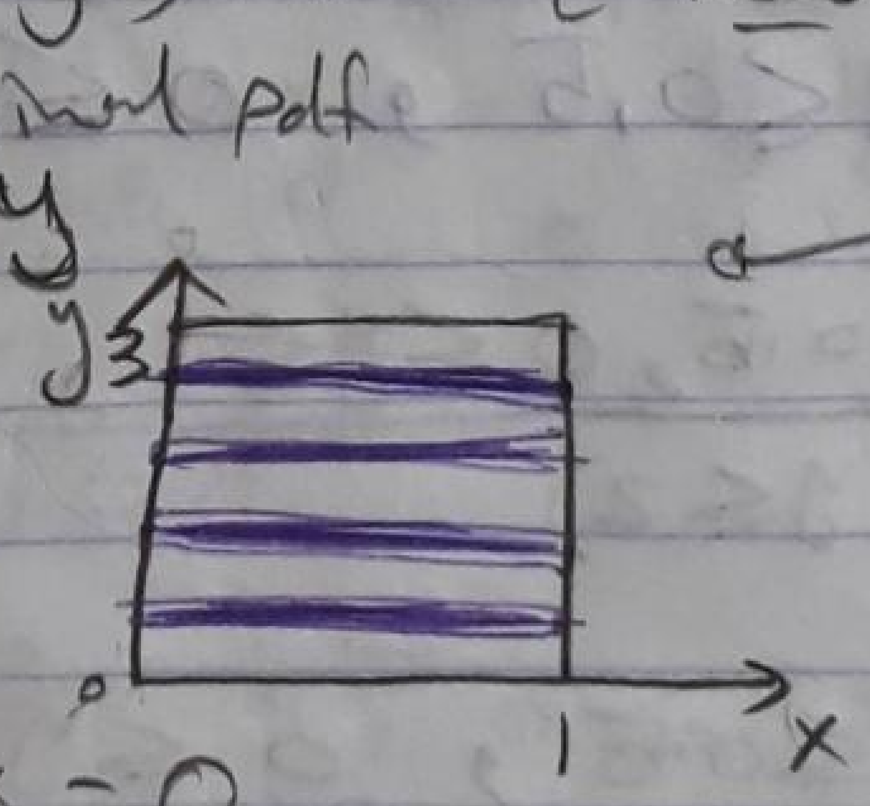
$$\therefore f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{O.W} \end{cases}$$

(g) Determine the marginal pdf of Y ?

لما بدي أطلع الـ pdf لـ y ، بتكامل بالنسبة إلى x

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\, dx \leftarrow \text{marginal pdf of } y$$

زي التكامل العادي



$$\therefore f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\, dx$$

$\boxed{\text{Case \#1}}$: $y<0 \Rightarrow f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} 0\, dx = 0$

كمل $\Rightarrow$

Scanned by TapScanner

$\boxed{\text{Case \#2}}$ $0 \leq y \leq 3 \Rightarrow f_y(y) = \int_0^1 \frac{1}{3}\, dx = \frac{1}{3}$

$\boxed{\text{Case \#3}}$ $y > 3 \Rightarrow f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} 0\, dx = 0$

$\therefore f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 0 \leq y \leq 3 \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}$

(h) Are x and y statistically Independent?

X is said to be statistically independent if $f_{(x,y)}(x,y) = f_x(x)\, f_y(y)$ for all values of x and y.

[illegible]

$\Rightarrow f_{x,y}(x,y) \overset{?}{=} f_x(x)\, f_y(y)$

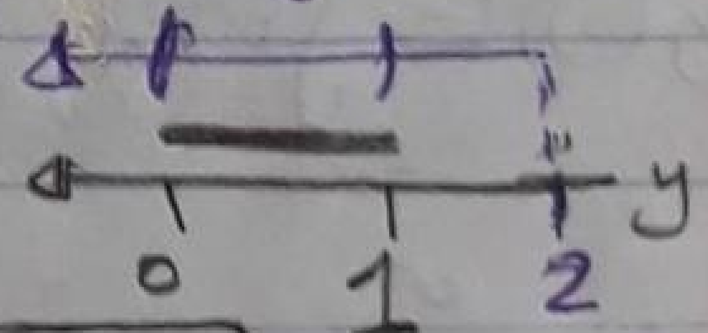
$\begin{cases} \frac{1}{3} & , 0 \leq x \leq 1 , 0 \leq y \leq 3 \\ 0 & , \text{o.w} \end{cases} \overset{?}{=} \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{o.w} \end{cases} * \begin{cases} \frac{1}{3}, & 0 \leq y \leq 3 \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}$

$\Downarrow$

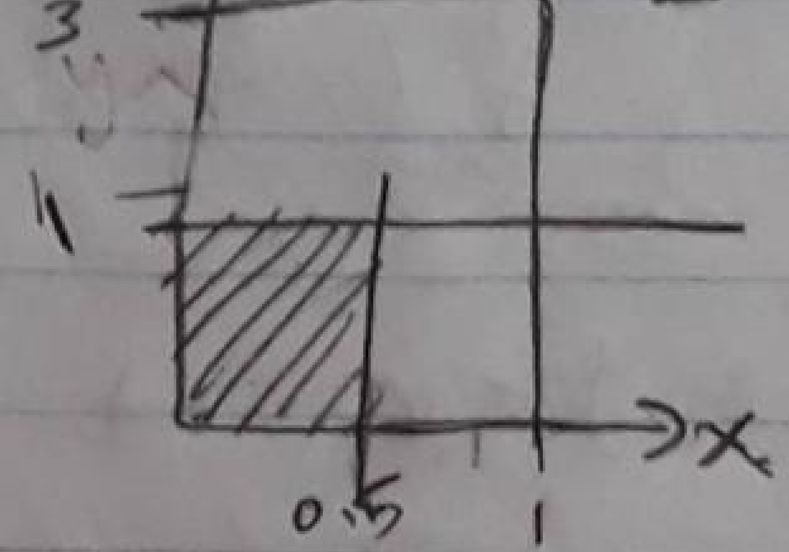
$= \begin{cases} \frac{1}{3}, & 0 \leq x \leq 1 , 0 \leq y \leq 3 \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}$

$\therefore$ x and y are statistically Independent.

(i) $P(\overbrace{0 \leq x \leq 0.5 , 0 \leq y \leq 1}^{A} / \overbrace{y \leq 2}^{B})$ $(0 \leq y \leq 1) \cap (y \leq 2)$



$= \dfrac{P(0 \leq x \leq 0.5, 0 \leq y \leq 1 , y \leq 2)}{P(y \leq 2)}$



$= \dfrac{P(0 \leq x \leq 0.5 , 0 \leq y \leq 1)}{P(y \leq 2)} \rightarrow$

$$= \frac{\int_0^{0.5}\int_0^{1} \frac{1}{3}\, dy\, dx}{\int_0^{1}\int_0^{2} \frac{1}{3}\, dy\, dx} = \frac{\int_0^{0.5} \frac{1}{3} y \Big|_0^1 dx}{\int_0^{1} \frac{1}{3} y \Big|_0^2 dx} = \frac{\int_0^{0.5} \frac{1}{3}\, dx}{\int_0^{1} \frac{2}{3}\, dx}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} x \Big|_0^{0.5}}{\frac{2}{3} x \Big|_0^1} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\cancel{6}\,2}\cdot\frac{\cancel{3}}{2} = \frac{1}{4}$$

(j) $P(y \le 1 / X = 0.5) = ?$ ⟸ ما بنقدر نحله بنفس طريقة قبل حساب ؛ فش فترة interval
ففش فترة رح يكون للتكامل ، بدنا اشي اسمه :-

لوجود $X=$ Conditional pdf of x :- $f_{y/X=0.5}(y) = \dfrac{f_{xy}(x,y)}{f_x(x)}\Big|_{X=0.5}$

أي أدق واحكي given إحكي بتاري كزا

Conditional pdf ~~for~~ of y :- $f_{x/y=y}(x) = \dfrac{f_{xy}(x,y)}{f_y(y)}\Big|_{y=y}$

$$f_{y/X=0.5}(y) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_x(x)}\Big|_{X=0.5} = \begin{cases} \frac{1/3}{1} & , 0 \le y \le 3 \\ \frac{0}{1} & , \text{o.w} \end{cases}$$

← على ال $y \le 1$ لقسيم ال $f_x(x)$ $X=0.5$ L6

$$\therefore \underline{f_{y/X=0.5}(y)} = \begin{cases} \frac{1}{3} & , 0 \le y \le 3 \\ 0 & , \text{o.w} \end{cases}$$

ولبس الـ probability

$$\therefore P(\underline{y \le 1} / X=0.5) = \int_{-\infty}^{1} f_{y/X=0.5}(y)\, dy = \int_0^1 \frac{1}{3}\, dy = \frac{1}{3}$$

تساوي $-\infty$

(k) $P(0.5 \le x \le 0.75 / y=1) = ??$

$$f_{x/y=1}(x) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_y(y)}\Big|_{y=1} = \begin{cases} \frac{1/3}{1/3} & , 0 \le x \le 1 \\ \frac{0}{1/3} & , \text{o.w} \end{cases}$$

Scanned by TapScanner

ال conditional

بلاحظ اسو طلع/نفس $f_x(x)$

كان ال x ال y ⇐

are SI

$$\therefore\ f_{X/y=1}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}$$

$$P(0.5 \le X \le 0.75 / y=1) = \int_{0.5}^{0.75} f_{X/y=1}(x)\, dx$$

$$= \int_{0.5}^{0.75} 1\, dx = 0.75 - 0.5 = 0.25$$

① $P(0.5 \le X \le 0.75 / Y=4)$

$$f_{X/Y=y} = \left. \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \right|_{Y=4} = 0$$

⇐ شايف ال $f_{x,y}(x,y)$ لما $y=4$ تساوي صفر، فخطيت صفر لأنه مع الأول صفر.

فا بقسم ١١ التالي بزبطش فمش طلعوا الجواب ١

$$f_{x/y=4}(x) = \frac{0}{\cancel{0}} = ?$$

بزبطش ⇐

$$\therefore\ P(0.5 \le x \le 0.75 / Y=4) = 0$$

Addition of Mean and variance

Example ① X and Y are two R.V with the following joint PMF:-

$x \backslash y$	-1	0	1
-1	$1/8$	$1/2$	0
1	0	$1/4$	$1/8$

ⓐ $E\{xy\} = ??$

$$E\{g(x,y)\} = \sum_{y=-\infty}^{\infty}\sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x,y)\,P(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_{y=-\infty}^{\infty}\sum_{x=-\infty}^{\infty} x\,y\,P(X=x, Y=y)$$

$$= (-1)(-1)P(X=-1, Y=-1) + \underset{x=-1}{(-1)}\underset{y=0}{(0)}P(X=-1, Y=0) + \dots$$

$$= (-1)(-1)(1/8) + (-1)\cancel{(0)}(1/2) + (-1)\cancel{(1)}(0) + (1)\cancel{(-1)}(0) + (1)\cancel{(0)}(1/4) + (1)(1)(1/8)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$$

ⓑ $E\{x^2y\} = \sum_{y=-\infty}^{\infty}\sum_{x=-\infty}^{\infty} x^2 y\,P(X=x, Y=y)$

$$= (-1)^2(-1)(1/8) + 0 + 0 + 0 + 0 + (1)(1)(1/8)$$

$$= \cancel{-1/8} + \cancel{1/8}$$

$$= 0$$

ⓒ $E\{(x+1)y\} = ?$

$$= \sum_{y=-\infty}^{\infty}\sum_{x=-\infty}^{\infty}(x+1)\,y\,P(X=x, Y=y) = (0)\cancel{(-1)}\left(\frac{1}{8}\right) + 0 + 0$$

$$+ (1+1)\cancel{(-1)}(0) + (1+1)\cancel{(0)}\left(\frac{1}{4}\right) + (1+1)(1)(1/8)$$

$$= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

نحط كاحتمال probability بتاعت $(x=1, y=1)$ بدونه ال $x+1$ لل

Example X and Y are two RVs with the following joint pdf :-

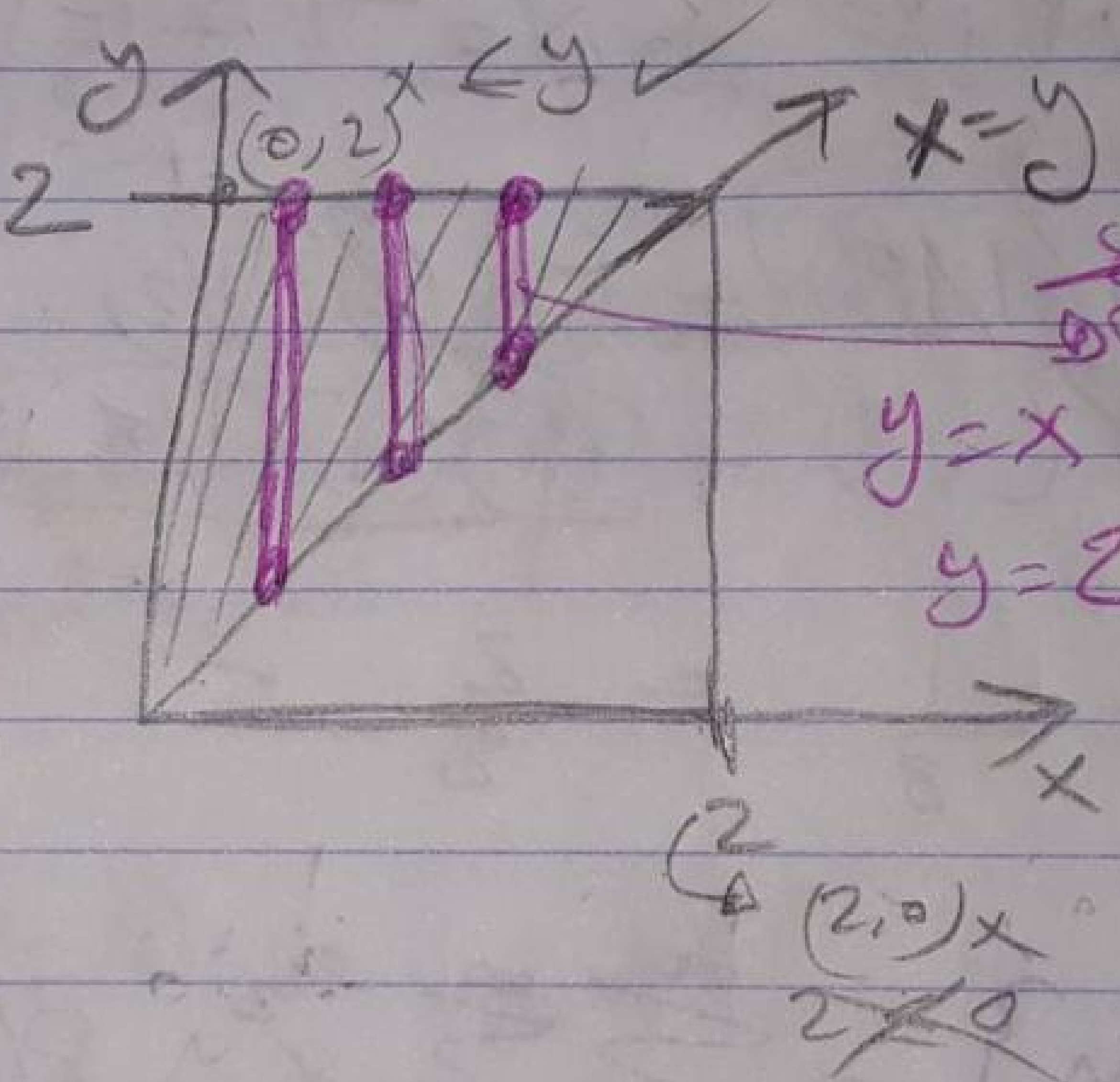
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k\,x^2 y , & 0 \le x \le y \le 2 \\ 0 , & \text{o.w} \end{cases}$$

ⓐ Determine the value of the constant k.

معنى هاي الفترة :-

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \\ x \le y \end{array}}$$

منرسم ال area اللي بتحددها هاي الشروط



منبدأ من هاد الخط الشرائح من $y=x$ وتنتهي عند $y=2$

* ملاحظة هامة : نوع الحركة بتحدد الفترة بغض النظر عن ال function هاد

إذاً حل السؤال :-

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = 1$$

$$\int_0^2 \left[\int_x^2 kx^2 y\,dy\right] dx = 1 \Rightarrow \int_0^2 kx^2 \frac{y^2}{2}\Big|_x^2 dx$$

$$= \int_0^2 \frac{kx^2}{2}\left[4 - x^2\right] dx = \int_0^2 \frac{k}{2}\left[4x^2 - x^4\right] dx$$

$$= \frac{k}{2}\left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]\Big|_0^2 = 1 \Rightarrow \frac{k}{2}\left[\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right] = 1$$

$$= \frac{k}{2}\left[\frac{160}{3\times5} - \frac{96}{3\times5}\right] = \frac{k}{2} * \frac{64}{15} = \frac{32}{15}k = 1$$

$$\therefore \boxed{k = \frac{15}{32}}$$

$\boxed{\text{Interval} \xrightarrow{\text{تحول}} \text{area}}$

(b) $E\{x(y+1)\} = ??$

اللي موجود جوه E هو اللي جنبه بينضرب ب $f_{xy}(x,y)$

$$E\{x(y+1)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(y+1)\, f_{xy}(x,y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{0}^{2}\int_{x}^{2} x(y+1)\, x^2 y\, dy\, dx = \frac{15}{32}\int_{0}^{2}\int_{x}^{2} \left(x^3y^2 + x^3y\right) dy\, dx$$

$$= \frac{15}{32}\int_{0}^{2}\left(\frac{x^3y^3}{3} + \frac{x^3y^2}{2}\right)\Bigg|_{x}^{2} dx = \frac{15}{32}\int_{0}^{2} x^3\left[\left(\frac{8}{3}+2\right) - \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{15}{32}\left(\frac{8}{3}\frac{x^4}{4} + \frac{2x^4}{4} - \frac{x^7}{21} - \frac{x^6}{12}\right)\Bigg|_{0}^{2}$$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

Notes:- (I) $E\{x+y\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y)\, f_{(x,y)}(x,y)\, dy\, dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{xy}(x,y)\, dy\, dx + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{xy}(x,y)\, dy\, dx$$

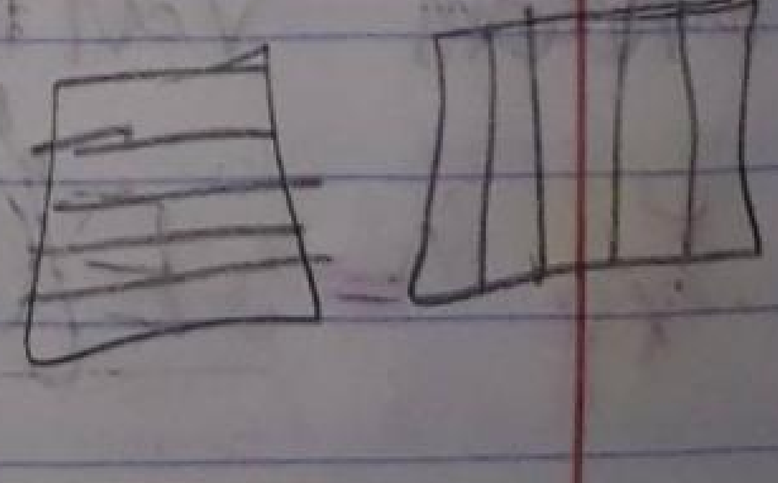
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{(x,y)}(x,y)\, dy\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)\, dx\, dy$$

عملنا تبديل بين dy وdx علشان الحدود ضلها زي ما هي يعني سواء أخذنا ال slices بالطول (dx) أو بالعرض (dy) كل إشي رح يضل زي ما هو

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_x(x) + \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_y(y)\, dy$$

$$= E\{x\} + E\{y\}$$

وإذا مضروبين بأي constant عادي كل إشي بينزل زي ما هو



II $E\{a_1 xy\} = ??$ Only if (x) and (y) are Statistically Independent

$$E\{a_1 xy\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a_1 xy\, f_{x,y}(x,y)\, dy\, dx$$

$\Downarrow$ If x & y are SI :-

$$f_{x,y}(x,y) = f_x(x)\, f_y(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} a_1 xy\, f_x(x)\, f_y(y)\, dy\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} a_1 x\, f_x(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} y f_y(y)\, dy\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} a_1 x\, f_x(x)\, \underline{\mu_y}\, dx$$

constant لأنها طلعناها برا

$$= a_1 \mu_y \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)\, dx}_{\mu_x} = a_1 \mu_y \mu_x = a_1 E\{x\}\, E\{y\}$$

$$\therefore E\{a_1 xy\} \underset{\text{only if } X \,\&\, Y \text{ are SI}}{=\!=} a_1 E\{x\}\, E\{y\}$$

Theorem :- Addition of Variances

co: مشترك relation: علاقة معامل

Definition :- The correlation coefficient between two random variables (X) and (Y) is :-

$$\rho_{XY} = \frac{E\{(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

$\Rightarrow$

مشترك : co
توزيع شرطي : variance

where μ_{xy} is called the covariance.

$\rho_{x,y}$ is bounded between $-1 \le \rho_{x,y} \le 1$

ما في بينهم علاقة يعني إذا عرفت قيمة x بعرفش أحدد قيمة y من خلال قيمة x

When $\rho_{xy} = 0$, X and Y are said to be uncorrelated

When $\rho_{x,y} = \pm 1$, x and Y are said to be fully correlated

يعني إذا بعرف قيمة x بقدر مباشرة أقول كم قيمة y.

* إذا كان $\rho_{x,y}$ سالب معناه إنو العلاقة بينهما عكسية، إذا زاد x يقل y ، أو إذا قل x يزداد واي.

* أما إذا كان $\rho_{x,y}$ موجب معناه إنو العلاقة بينهما طردية إذا زاد (x) يزداد y ، وإذا قل (x) يقل y.

Talking about the covariance:-

$$\mu_{xy} = E\{(x-\mu_x)(y-\mu_y)\}$$

$$= E\{xy - x\mu_y - y\mu_x + \mu_x\mu_y\}$$

$$= E\{xy\} - \mu_y E\{x\} - \mu_x \cancel{E\{y\}} + \cancel{\mu_x\mu_y}$$

$$\therefore \boxed{\mu_{xy} = E\{xy\} - \mu_x\mu_y}$$

* إذا عرفت ال covariance بقدر بكل سهولة أجيب ال correlation coefficient

Random variables

$\boxed{\text{Example}}$: X and Y are two RVs with the following joint PMF :

x \ y	-1	1
-1	1/4	1/4
1	1/4	1/4

$\boxed{a}$ Determine $\rho_{x,y} = ??$

$$\rho_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad , \quad \mu_{xy} = E\{(x-\mu_x)(y-\mu_y)\}$$

$$P(X=x) = \begin{cases} 1/2 & x=-1 \\ 1/2 & x=1 \\ 0 & o.w \end{cases} \quad , \quad P(Y=y) = \begin{cases} 1/2 & y=-1 \\ 1/2 & y=1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\therefore \mu_x = \sum_{-\infty}^{\infty} x \, P(X=x) = (-1)(1/2) + 1*(1/2) = 0$$

$$\mu_y = \sum_{-\infty}^{\infty} y \, P(Y=y) = (-1)(1/2) + (1)(1/2) = 0$$

$$\mu_{xy} = E\{(x-\cancel{\mu_x})(y-\cancel{\mu_y})\} = E\{xy\}$$

$$= \sum_{y=-\infty}^{\infty} \sum_{x=-\infty}^{\infty} x\,y\, P(X=x, Y=y)$$

$$= (-1)(-1)(1/4) + (-1)(1)(1/4) + (1)(-1)(1/4) + (1)(1)(1/4)$$

$$= 0$$

$$\therefore \rho_{xy} = \frac{0}{\sigma_x \sigma_y} = 0 \leftarrow \therefore \text{ X and Y are Uncorrelated.}$$

$\boxed{b}$ Are X and Y Statistically Independent?

$P(X=x, Y=y) \stackrel{?}{=} P(X=x)\, P(Y=y)$ for all values of x & y

$\langle x=-1, Y=1 \rangle \rightarrow \frac{1}{4} \stackrel{\checkmark}{=} \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$

$\langle x=-1, Y=1 \rangle \rightarrow \frac{1}{4} \stackrel{\checkmark}{=} \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$

$\langle x=1, Y=-1 \rangle \rightarrow \frac{1}{4} \stackrel{\checkmark}{=} \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$

$\langle x=1, Y=1 \rangle \rightarrow \frac{1}{4} \stackrel{\checkmark}{=} \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$

So X and y are Statistically Independent

* If x and y are Independent, then they are Uncorrelated ($\rho_{x,y} = 0$), But the converse is NOT Necessarily true.

As :- $\mu_{xy} = E\{(x-\mu_x)(Y-\mu_Y)\}$

$$= E\{xy\} - \mu_x \mu_Y$$

↓ if x and y are SI:-

$$= E\{x\} E\{Y\} - \mu_x \mu_y$$

$$= 0$$

يعني إذا مابلي سؤال بالأول هل x و y ستاستكلي indep
وطلع معي yes
والجزء التاني سألني شو ال correlation coefficient بقول
بطول بحكيله إنو = 0 .

$\boxed{\text{Example}}$ let x be a R.V with $\boxed{\mu_x = 1}$ and $\boxed{\sigma_x^2 = 4}$. Y is another R.V with $\boxed{\mu_y = -1}$ and $\boxed{\sigma_y^2 = 9}$, $\boxed{R = 2x - y}$, and $\boxed{\rho_{xy} = 0.5}$

(a) $\mu_R = ??$

$$\mu_R = 2\mu_x - \mu_y$$

$$= 2(1) + 1$$

$$= 3$$

تابع →

Scanned by TapScanner

$a_1 = 2$ $\quad$ $a_2 = -1$

(b) $Var\{R\} = ??$ $\quad R = 2x - y \Rightarrow a_1 x + a_2 y$

$$Var\{R\} = \sigma_R^2 = (a_1)^2 \sigma_x^2 + (a_2)^2 \sigma_y^2 + 2 a_1 a_2 \sigma_x \sigma_y \rho_{xy}$$

$$= (2)^2 (4) + (-1)^2 (9) + 2(2)(-1)(\sqrt{4})(\sqrt{9})(0.5)$$

$$= 16 + 4 + (-12) = 13$$

*** Theorem:** let $Y = a_1 X_1 + a_2 X_2$, then

$$\sigma_Y^2 = a_1^2 \sigma_{x_1}^2 + a_2^2 \sigma_{x_2}^2 + 2 a_1 a_2 \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} \rho_{xy}$$

إذا كانوا x, y ← SI ← إذا $\boxed{\rho_{xy} = 0}$ فكل الجزء هاد بيشطب

Functions of Random Variables

Example :-

Consider the joint pdf shown in the table,

Let $Z = X + Y$

[I] Find the probability mass function of Z, $P(Z=z)$.

X \ Y	1	2	3	4
1	0.1	0	0.1	0
2	0.3	0	0.1	0.2
3	0	0.2	0	0

شلنا الـ 0 ع أساس احتمالية حدوثهم = صفر فمش هنحطها

مفتاح x+y

X	Y	Z	$P(Z=z)$
1	1	2	$P(X=1, Y=1) = 0.1$
~~1~~	~~2~~		0
1	3	4	$P(X=1, Y=3) = 0.1$
~~1~~	~~4~~		
2	1	3	$P(X=2, Y=1) = 0.3$
~~2~~	~~2~~		
2	3	5	$P(Z=5) = P(X=2, Y=3) + P(X=3, Y=2) = 0.1 + 0.2 = 0.3$
2	4	6	$P(X=2, Y=4) = 0.2$
~~3~~	~~1~~		
3	2	5	
~~3~~	~~3~~		
~~3~~	~~4~~		

لازم أنتبه لزي هيك شغلات

هذول الصح / الجدول صفوفه أصلا كل زوج مع التاني 3 tupples

$$\therefore P(Z=z) = \begin{cases} 0.1, & z=2 \\ 0.3, & z=3 \\ 0.1, & z=4 \\ 0.3, & z=5 \\ 0.2, & z=6 \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}$$

$\boxed{2}$ Find $P(X=Y)=?$

$$= P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=3)$$
$$= 0.1 + 0 + 0$$
$$= 0.1$$

$\boxed{3}$ $E\{X+Y\} = ?$

$$E\{X+Y\} = E\{Z\} = \sum_{-\infty}^{\infty} z\, P(Z=z)$$

0.2   0.9   0.4   1.5   1.2

$$= 2(0.1) + 3(0.3) + 4(0.1) + 5(0.3) + 6(0.2)$$

$$= 4.2$$

بيجيك سؤال إذا كان طالب $E\{x+y\}$ بدون ما يطلب Z ، فش داعي بالأول أطلع Z ، إنما بحله عادي زي ما بحل دايما.

The Continuous R.V case

Note: X and Y are two continuous R.Vs. $f_{X,Y}(x,y)$ is the joint pdf of X and Y. A new R.V $\boxed{Z = X+Y}$ is defined. Determine the pdf of Z.

In such a question, we can't find the pdf directly. Thus, we know that :- $f_Z(z) = \dfrac{dF_Z(z)}{dz}$ ← ال pdf هو مشتقة ال cdf

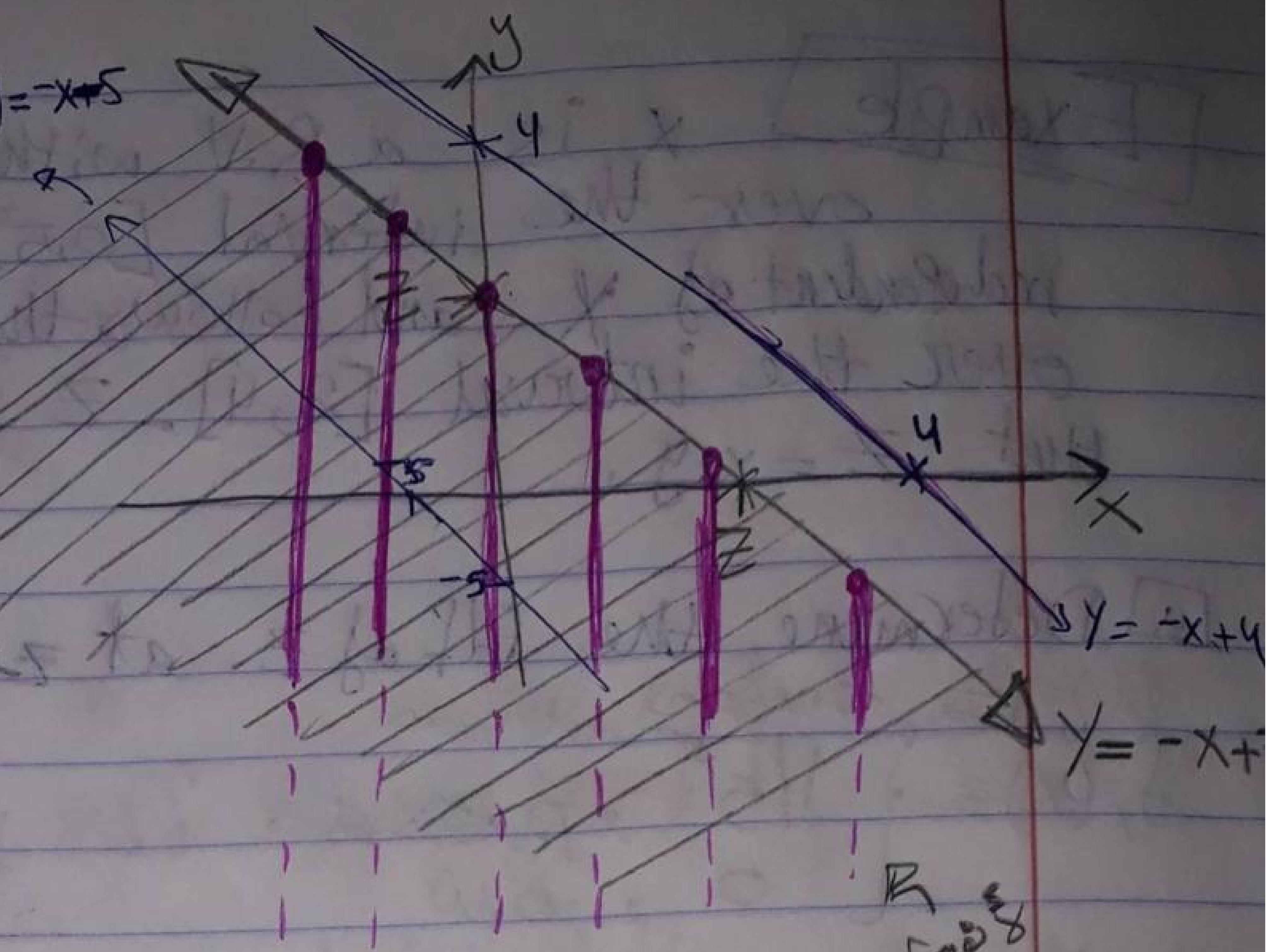
$$F(z) = P(\underbrace{Z}_{\text{Random Variable}} \le \underbrace{z}_{\text{value}})$$

$$= P(X+Y \le z)$$

$$\therefore F(z) = P(Y \le -x+z)$$

لتحديد حدود التكامل :-

$y=-x+5$ هي نقاط التقاطع مع محوري x و y تشكل z .



$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{-x+z} f_{x,y}(x,y)\,dy\,dx$$

If x & y are S.I

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{-x+z} f_x(x) f_y(y)\,dy \right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{-x+z} f_y(y)\,dy}_{F_y(y)}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \left[F_y(y) \Big|_{-\infty}^{-x+z} \right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \quad F_y(-x+z) - \cancel{F_y(-\infty)}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\, F_y(-x+z)\,dx$$

$$f_z(z) = \frac{d\,F_z(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \frac{d\,F_y(-x+z)}{dz}\,dx$$

دخلنا الاشتقاق جوه مش على كل التكامل عشان الاشتقاق بالنسبة إلى z مش إلى x .

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\, f_y(-x+\overset{\text{مشتقة } z = 1}{z})\,dx$$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\, f_y(z-x)\,dx$$ → Only If x & y are SI .

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\, f_x(z-y)\,dy$$ ⇒ هدول الصيغتين اسمهم :

Convolutional integral

لأنو مش محدودة فهي بتبدأ من $(-\infty)$ وظلّلنا المنطقة هاي عشان فيها بتكون الـ $y \le -x+z$ لأنه إذا أخذنا فيها أي زوج مرتب على فرض القيمة مثلاً 4 كنا نشوف x ... و y المنحنى تبع $y=-x+z$ أو تحته ... وين بتحقق المعادلة $\boxed{y \le -x+z}$

هدول طبعاً خاصين بالـ $z=x+y$

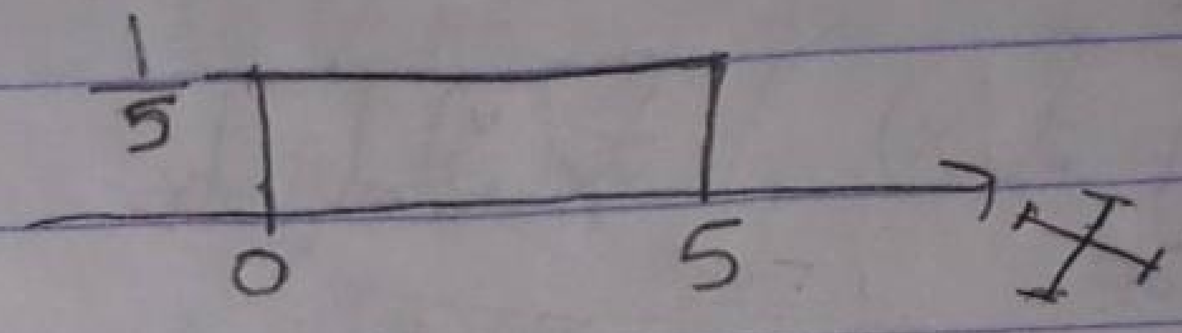
مش كل الـ continuous

$\boxed{\text{Example}}$ x is a R.V with $\boxed{\text{uniform distribution}}$ over the interval $[0,5]$, y is another R.V independent of x and follows the $\boxed{\text{uniform distribution}}$ over the interval $[2,4]$. Z is a new R.V such that $Z = x+y$.

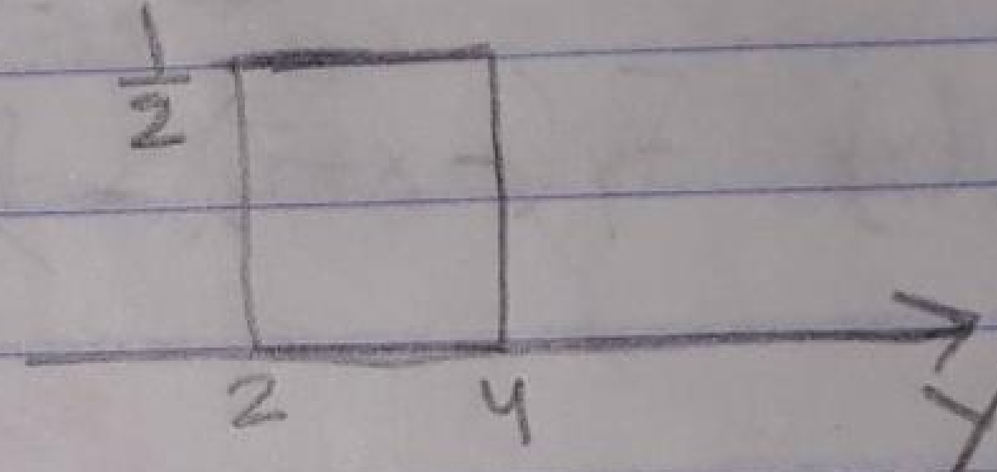
$\boxed{a}$ Determine the Pdf of Z at $z=4$.

$f_x(x) = \frac{1}{b-a}$:- حسب قانون الـ uniform

$$f_x(x) = \begin{cases} 1/5 & , 0 \le x \le 5 \\ 0 & , \text{o.w} \end{cases}$$



$$f_y(y) = \begin{cases} 1/(4-2) & , 2 \le y \le 4 \\ 0 & , \text{o.w} \end{cases}$$

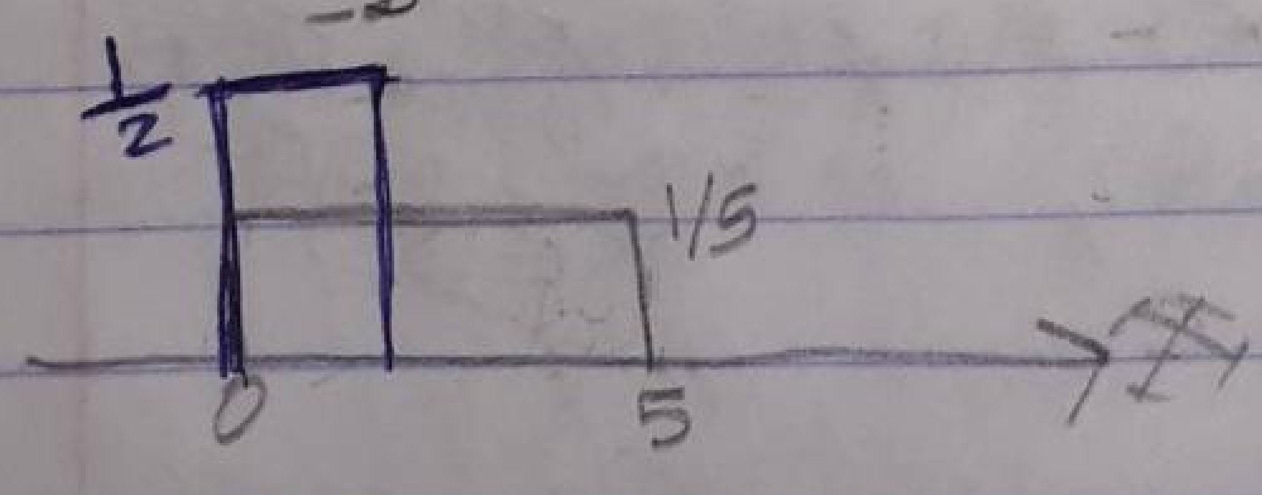


$$= \begin{cases} 1/2 & , 2 \le y \le 4 \\ 0 & , \text{o.w} \end{cases}$$

حسب القانون اللي أخذناه بالصفحة اللي فاتت :-

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\, f_y(z-x)\, dx$$

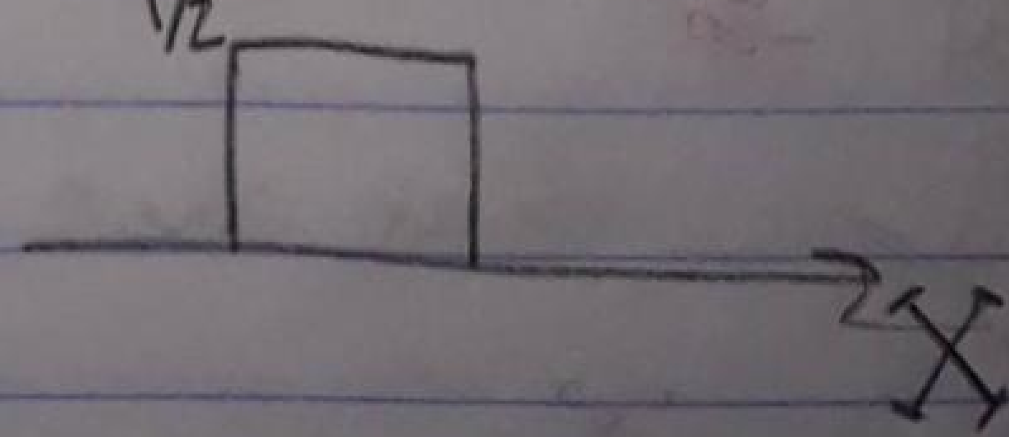
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\, f_y(4-x)\, dx \xRightarrow{\text{Thus}} f_y(4-x) = \begin{cases} 1/2 & , 2 \le 4-x \le 4 \\ 0 & , \text{o.w} \end{cases}$$



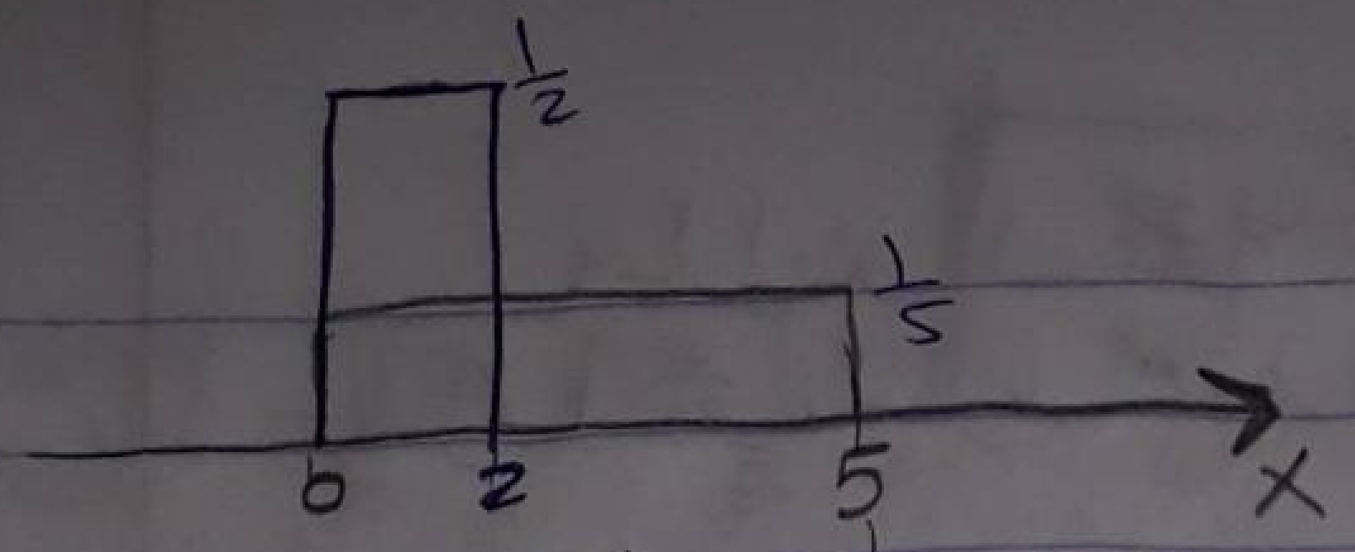
حصر قولنا الـ x, y فصرنا نقدر نتعامل معها كـ x ، وحطيناهم على نفس خط الأعداد الخاص بـ x .

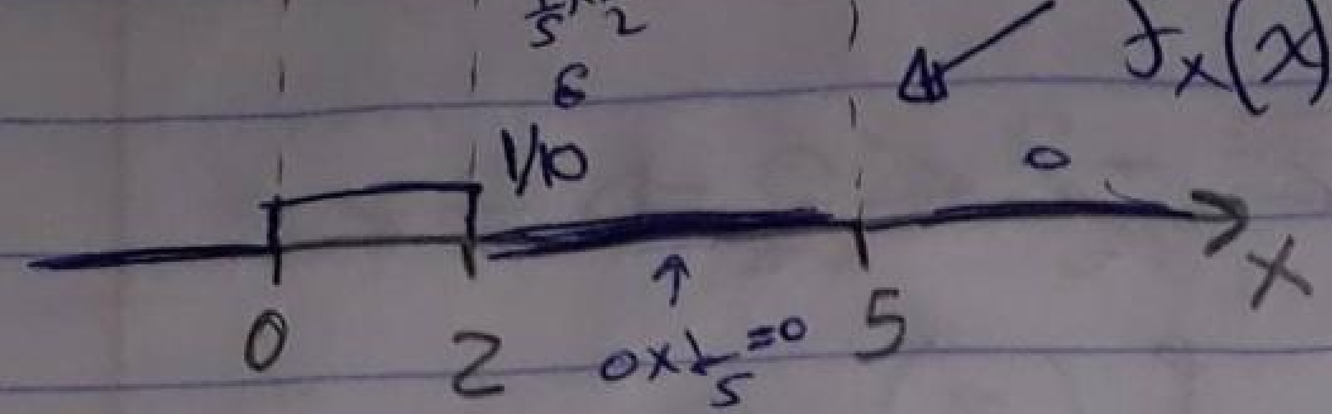
$$= \begin{cases} 1/2 & , -2 \le -x \le 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\therefore f_y(4-x) = \begin{cases} 1/2 & , 0 \le x \le 2 \\ 0 & , \text{o.w} \end{cases}$$



تكملة $\Longrightarrow$



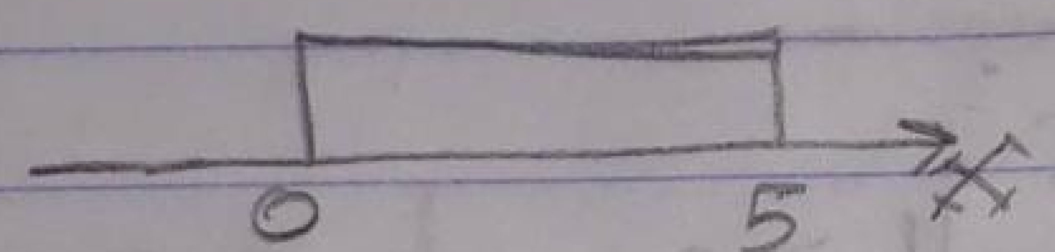


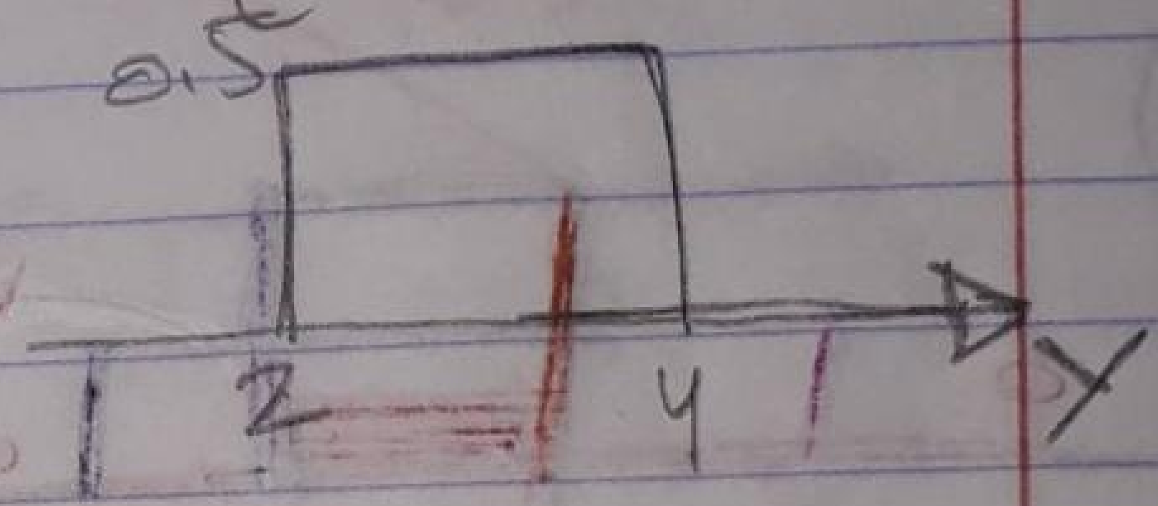
$f_X(x)\,f_Y(4-x)$

$$\therefore f_Z(4) = \int_0^2 \frac{1}{10}\,dx = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$\boxed{b}$ Determine the pdf of Z ?

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/5, & 0 \le x \le 5 \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1/2, & 2 \le y \le 4 \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}$$



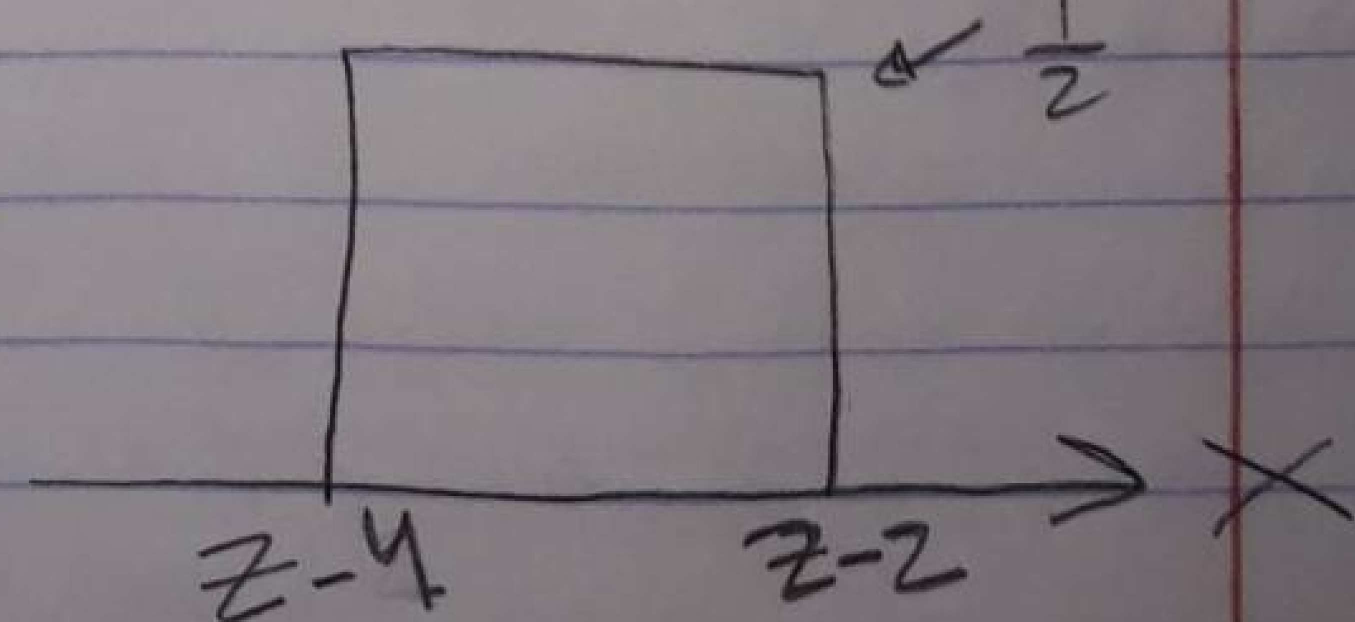


$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,f_Y(y)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,dx$$

but $f_Y(z-x) = \begin{cases} 1/2, & 2 \le z-x \le 4 \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}$

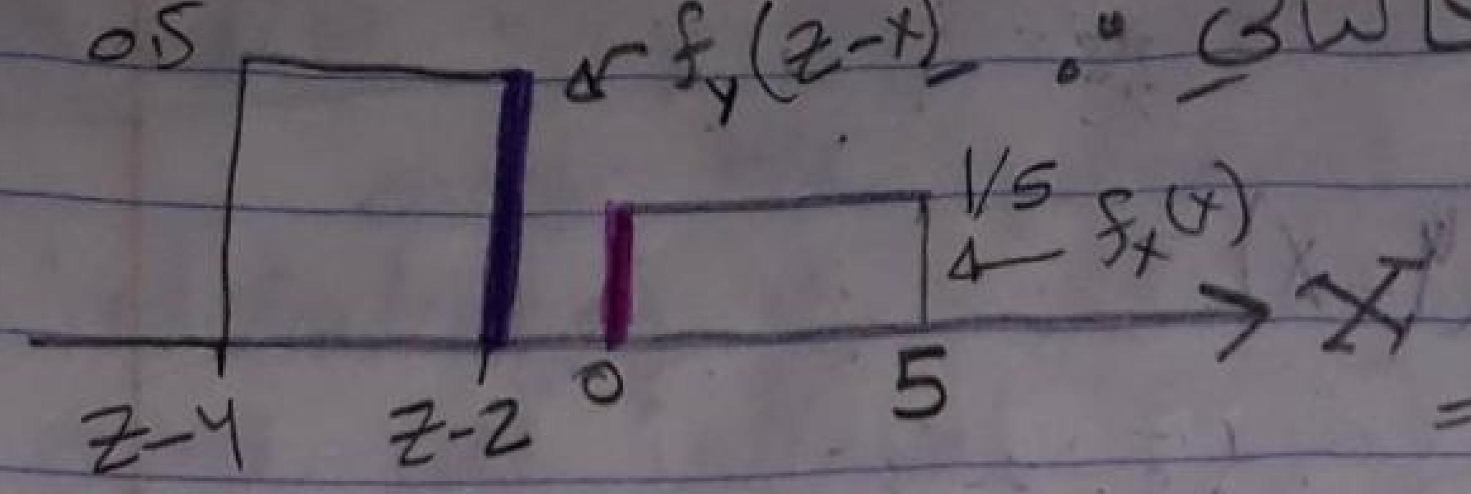
$$= \begin{cases} 1/2, & -z+2 \le -x \le -z+4 \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}$$

$$f_Y(z-x) = \begin{cases} 1/2, & z-4 \le x \le z-2 \\ 0 \end{cases}$$



بما إنو الـ Z مش محصورة بفترة معينة إذاً
في أكثر من case ، كالتالي :

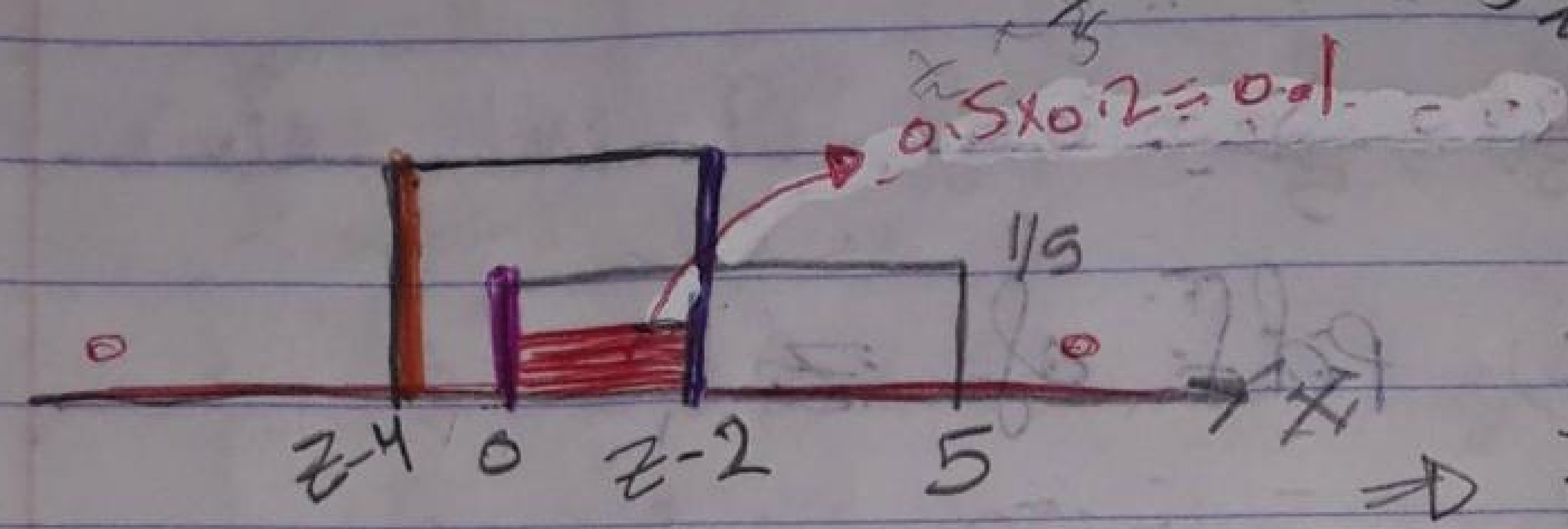
I



$$\Rightarrow Z - 2 < 0 \Rightarrow Z < 2$$

$$f_Z(z) = 0$$

II

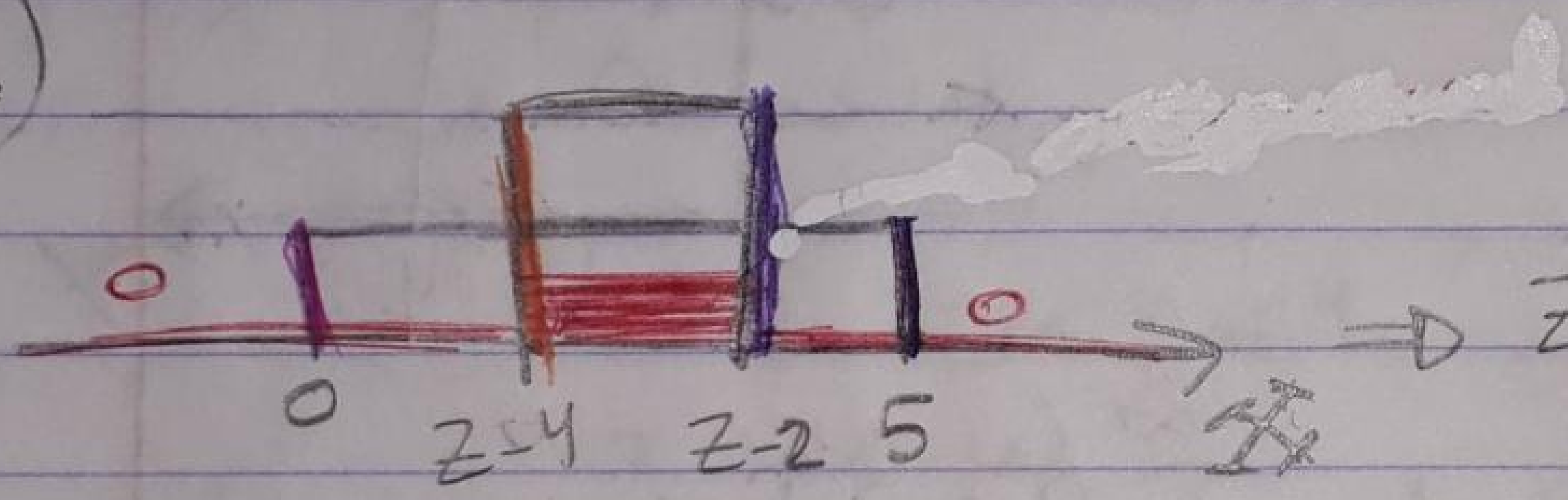


$$\Rightarrow Z-2 > 0 \text{ and } Z-4 < 0$$

$$Z > 2 \text{ and } Z < 4$$

$$\therefore f_Z(z) = \int_0^{z-2} \frac{1}{10}\, dx = \frac{1}{10}(z-2)$$

III



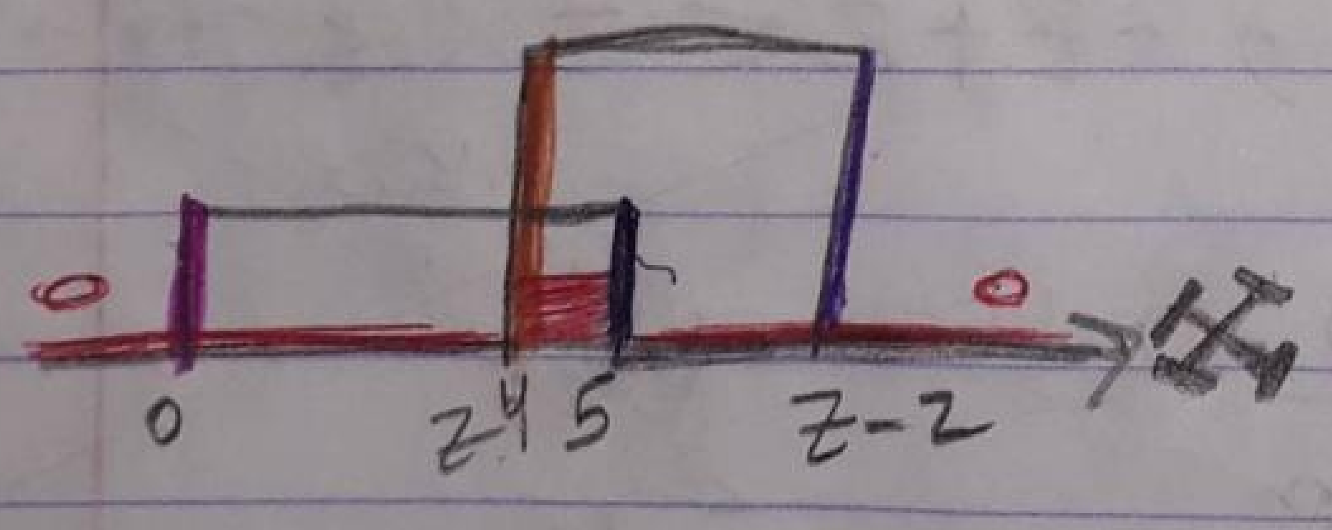
$$\Rightarrow Z-4 > 0 \text{ and } Z-2 < 5$$

$$Z > 4 \text{ and } Z < 7$$

$$f_Z(z) = \int_{z-4}^{z-2} \frac{1}{10}\, dx = \frac{1}{10} \times \Big|_{z-4}^{z-2}$$

$$= \frac{1}{10}\left[\cancel{z} - 2 - \cancel{z} + 4\right] = \frac{1}{10}[2] = \frac{1}{5}$$

IV



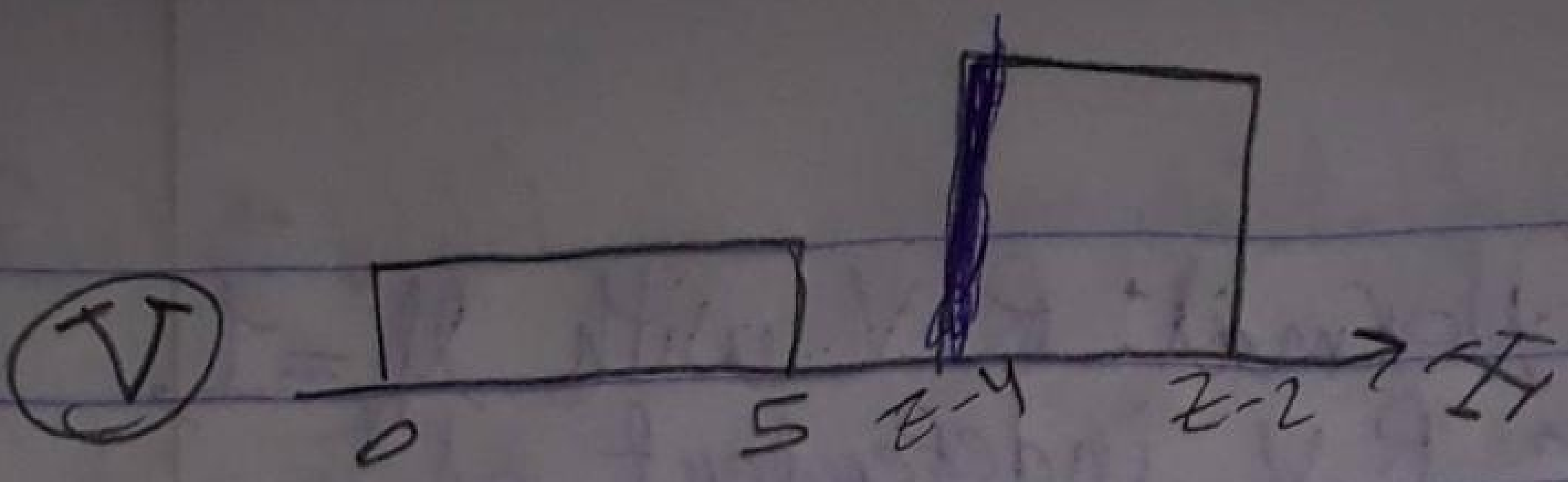
$$Z-2 > 5 \text{ and } Z-4 < 5$$

$$Z > 7 \text{ and } Z < 9$$

$$\therefore f_Z(z) = \int_{z-4}^{5} \frac{1}{10}\, dx = \frac{1}{10}[5 - z + 4]$$

$$= \frac{1}{10}[9 - z].$$

(V)



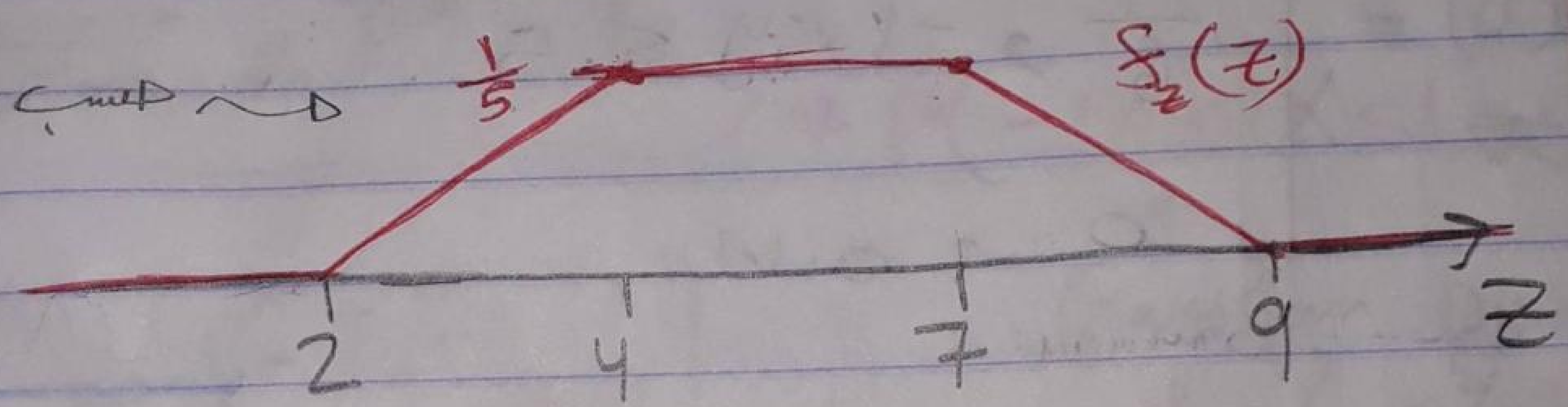
$$z-4 > 5$$

$$z > 9$$

$$f_z(z) = 0$$

$$\therefore f_z(z) = \begin{cases} 0 & , z < 2 \\ (1/10)(z-2) & , 2 \le z < 4 \\ 1/5 & , 4 \le z < 7 \\ (1/10)(9-z) & 7 \le z < 9 \\ 0 & 9 \le z \end{cases}$$

حسب ال PdF



طريقة سهلة عشان أتأكد من الفترات اللي أنا عاملاهم هنا :

الفرق بقى $f_x(x)$

$f_x(x) \longrightarrow$ 0 5

$f_y(y) \longrightarrow$ 2 4

2 7 4 9

تغير ترتيبها

$\longleftarrow$ 2 $\longleftrightarrow$ 4 $\longleftrightarrow$ 7 $\longleftrightarrow$ 9 $\longrightarrow$

(I) (II) (III) (IV) (V)

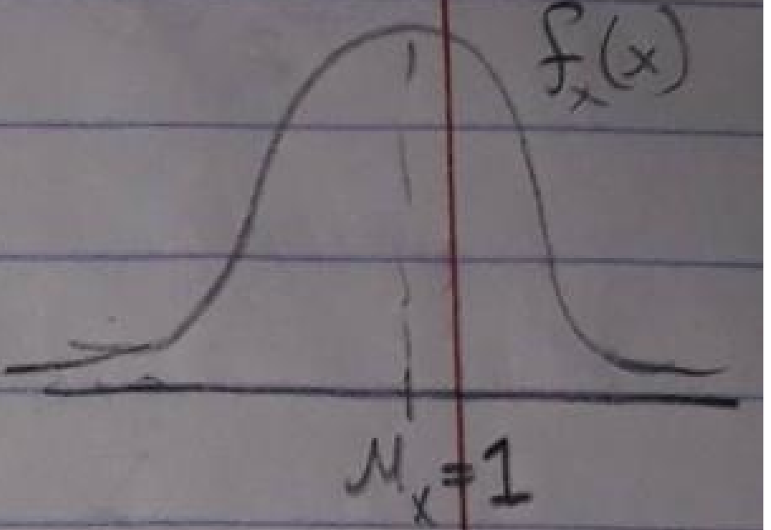
Scanned by TapScanner

Example: let x be a Normal R.V with $\mu_x = 1$, and $\sigma_x^2 = 9$. y is another R.V independent of x with a uniform distribution over the interval $[-1, 5]$. $Z = X + Y$. Determine the pdf of Z at $\boxed{Z=0}$.

$$f_Z(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(Z - x)\, dx$$

لأنو Normal
Gaussian

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi * 9}}\, e^{\frac{-(x-1)^2}{2*9}} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$



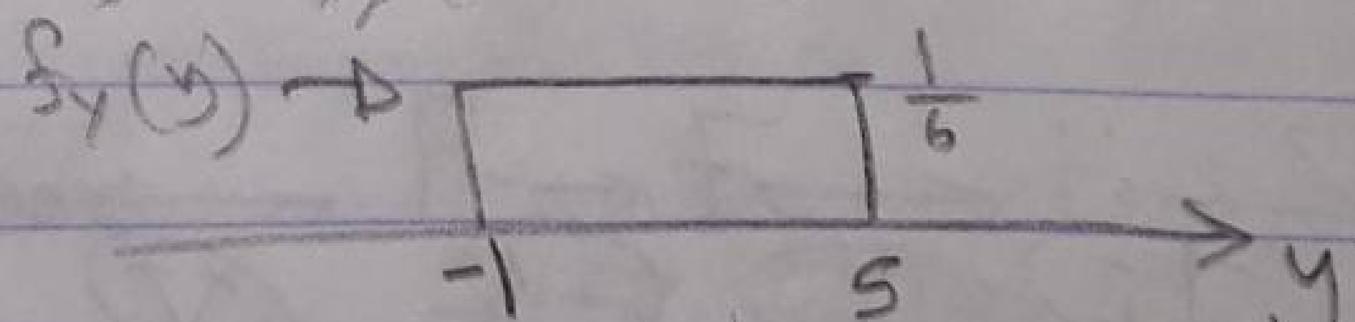
$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6} , & -1 \le y \le 5 \\ 0 , & \text{o.w} \end{cases}$$

$$\therefore f_Y(Z - x) = \begin{cases} \frac{1}{6} , & -1 \le Z - x \le 5 \\ & {\scriptstyle -Z} \quad\; {\scriptstyle -Z} \quad\;\; {\scriptstyle -Z} \\ 0 , & \text{o.w} \end{cases}$$

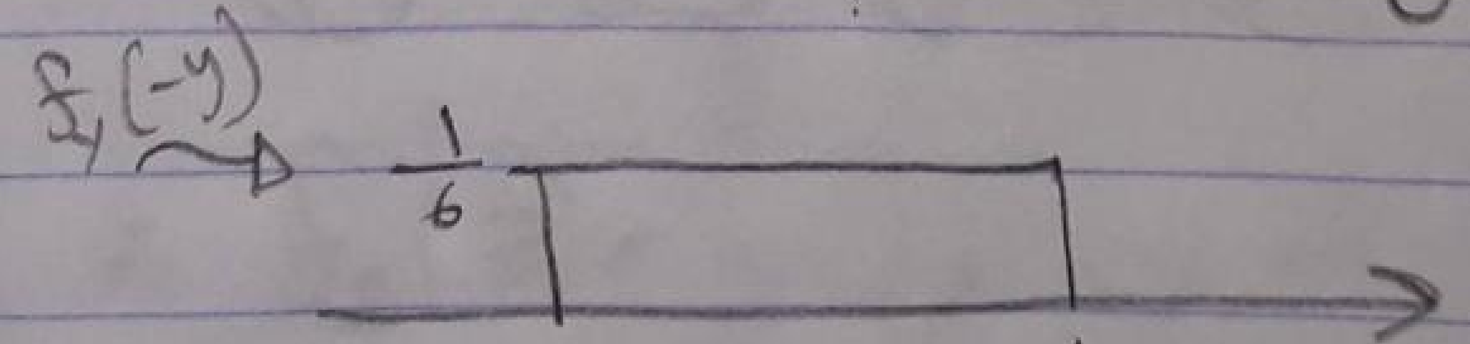
$$= \begin{cases} \frac{1}{6} , & Z - 5 \le x \le Z + 1 \\ 0 , & \text{o.w} \end{cases}$$

طريقة سهلة لرسم $f_Y(Z-X)$ ، بدل ما أحوّل y بدلالة z و x أوّل بحرين أرسم :

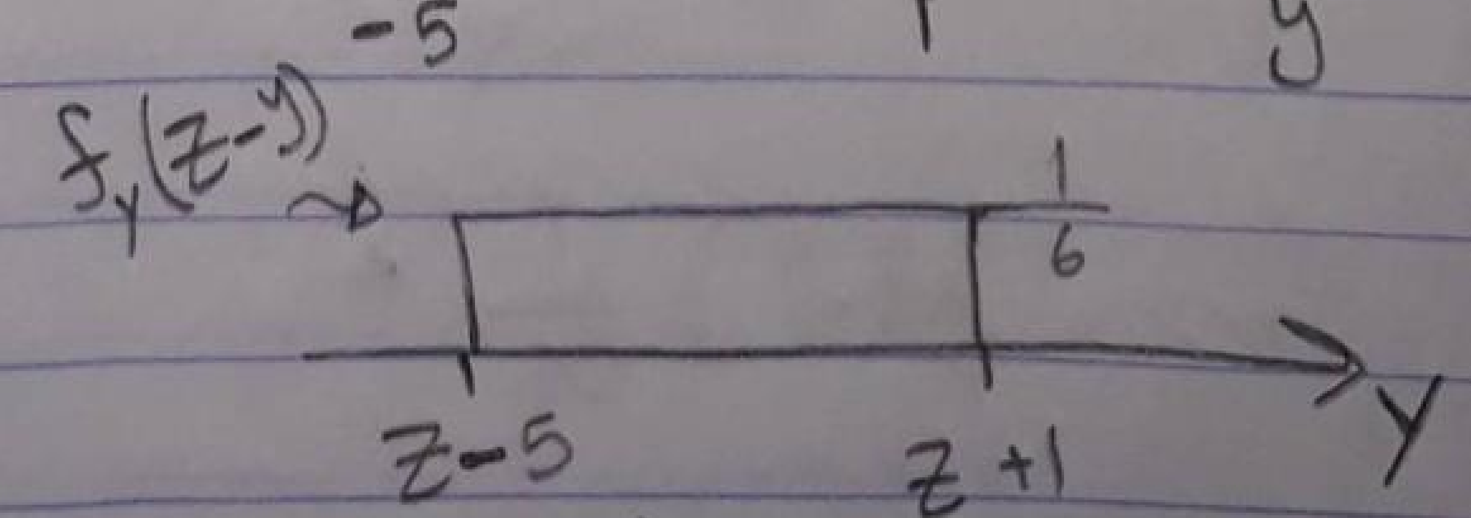
1 بوسم بدلالة y عادي نفس هاد



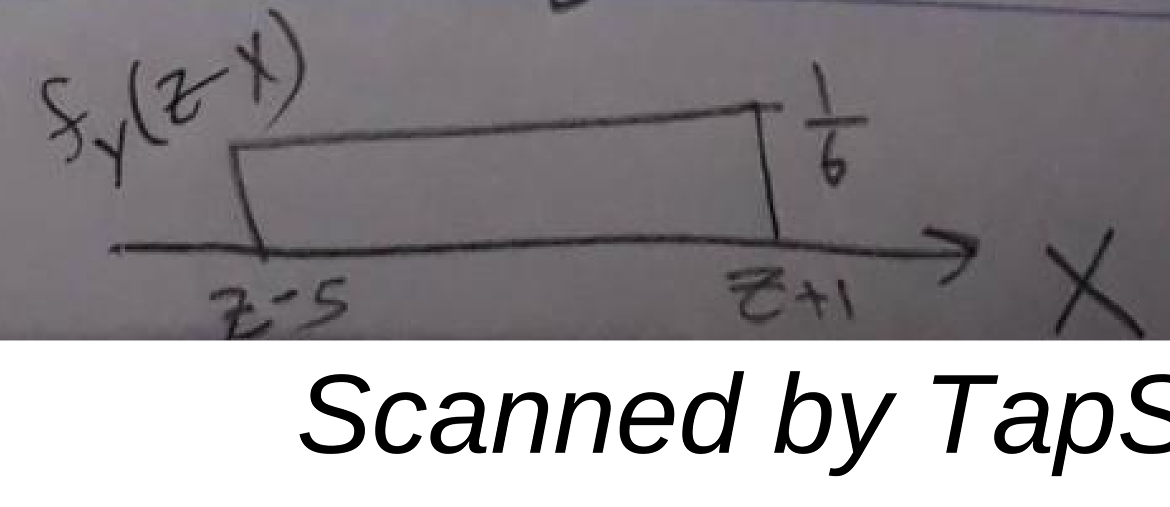
2 بوسم $f_Y(-y)$ ، بس بضرب حدود y بسالب ، بالتالي رح أعكس أماكنهم لأنو الكبير بصير ما والصغير بيكبر بعد السالب .



3 بضيف z للحدود وللداخل الـ $f_Y(-y)$ فتصبح $f_Y(Z-y)$

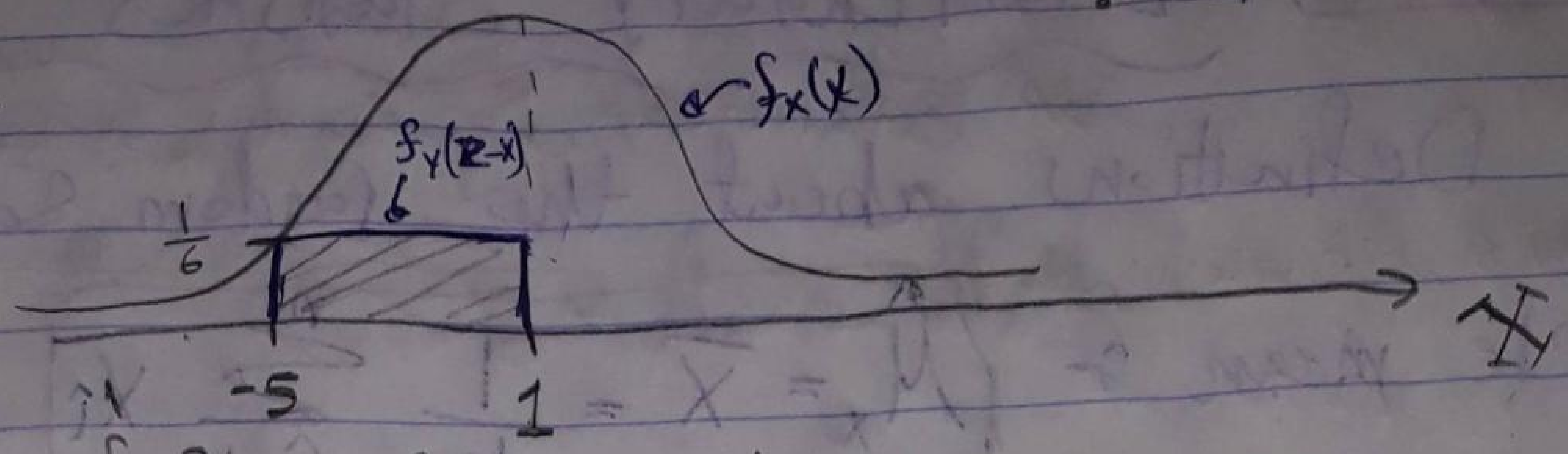


4 بدل الرمز y ، بحط الرمز X



وهيك بكون حصلت على $f_Y(z-x)$ بطريقة سريعة، وبقدر اقارنها مع $f_X(x)$
على خط X .

at $\boxed{z=0}$:-



$$\therefore f_Z(z=0) = \int_{-5}^{1} f_X(x)\, f_Y(\underset{0}{z}-x)\, dx$$

$$= \int_{-5}^{1} \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi * 9}}\right) e^{-\frac{(x-1)^2}{2*9}}\, dx$$

$$= \frac{1}{6} \boxed{\int_{-5}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi * 9}}\, e^{-\frac{(x-1)^2}{2*9}}\, dx} \rightarrow P(-5 \le X \le 1)$$

Gaussian Distribution
$\mu_x = 1,\ \sigma_x^2 = 9$

$$\therefore = \frac{1}{6}\left[\phi\left(\frac{1-1}{\sqrt{9}}\right) - \phi\left(\frac{-5-1}{\sqrt{9}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\phi(0) - \phi(-2)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\phi(0) - [1 - \phi(2)]\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[0.5 - 1 + \phi(2)\right]$$

وبطلع هاي من الجدول .